Suurten poikkeamien teoria ja Cramérin lause

Eveliina Nyandoto

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Helsingin yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Vakuutus- ja finanssimatematiikan linja

Kevät 2014

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty		Laitos/Institution– Department
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta		Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Tekijä/Författare – Author		
Eveliina Nyandoto		
Työn nimi / Arbetets titel – Title		
Suurten poikkeamien teoria ja Cramérin lause		
Oppiaine /Läroämne – Subject		
Soveltava matematiikka		
Työn laji/Arbetets art – Level	Aika/Datum – Month and year	Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Maaliskuu 2014	47

Tiivistelmä/Referat – Abstract

Työssäni käsitellään suurten poikkeamien teoriaa, erityishuomiona Cramérin lause. Työn tavoitteena on sekä esitellä suurten poikkeamien matemaattis-teoreettista tulkintaa että pyrkiä tuomaan esiin hyödyllisiä sovelluskohteita erityisesti vakuutus- ja finanssimatematiikan näkökulmasta.

Työn aluksi määritellään momentit generoiva funktio, karakteristinen funktio ja kumulantit generoiva funktio, sekä esitetään yksinkertaisia esimerkkejä gamma-jakautuneelle satunnaismuuttujalle. Näiden määritelmien avulla muodostetaan edelleen Legendre-Fenchel-transformaatio, jonka on tärkeä käsite suurten poikkeaminen teorian ymmärtämiseksi. Legendre-Fenchel, eli konveksiin konjuganttimuunnokseen viitataan usein tässä yhteydessä nimellä vauhtifunktio. Todennäköisyysmitta ja σ-algebra, sekä ehdollisen odotusarvon määritelmät esitetään lyhyesti tukemaan Cramérin lauseen syvempää ymmärtämistä.

Suurten poikkeamien teoriaa käytetään esimerkiksi todennäköisyysteorian piirissä tutkittaessa asymptoottisten häntätodennäköisyyksien kulkua. Sen avulla tutkitaan suurten lukujen lain suppenemisvauhtia. Tässä työssä tarkemman tarkastelun kohteeksi on otettu Cramérin lause, jonka todistus esitetään yksityiskohtaisesti. Todistuksessa käytetään hyväksi muun muassa Chebychevin epäyhtälöä, mittamuutosta sekä Lebesguen monotonista suppenemisteoriaa.

Työn lopuksi käsitellään lyhyesti luottoriskillisiä sijoituskohteita ja niiden analyysiä. Työssä esitetään muutamia peruskäsitteitä luottoriskillisten sijoituskohteiden sekä niitä koskevien sijoituspäätösten ymmärtämisen tueksi. Numeerisessa esimerkissä havainnollistetaan aiemmin esitetyn teorian sovellusta yrityslainamarkkinaan. Tarkastelun kohteena ovat Euroopan ja Yhdysvaltojen markkinat, sekä talouden syklit nousu-, huippu-, lasku- ja lamakausi. Muodostamalla high yield ja investment grade -sijoitusluokkiin kuuluvia yrityslainoja sisältävä sijoitussalkku ja tutkimalla sen luottotapahtuman yhteydessä aiheuttamia tappioita päästään näkemään suurten poikkeamien teorian tulkintaa käytännössä.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords

Suuret poikkeamat, Cramérin lause, Legendre-Fenchel-transformaatio, luottoriski, yrityslainat

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällysluettelo

Johdanto

Tämä työ on tehty Helsingin yliopistolle pro gradu -tutkielmaksi. Tarkoituksena on esitellä suurten poikkeamien teoriaa erityisesti Cramérin lauseen näkökulmasta. Tutkielmassa esitellään myös momentit ja kumulantit generoivat funktiot, karakteristinen funktio, sekä Legendre-transformaatio. Legendre-transformaation yleistyksenä esitetään vielä Legendre-Fenchel-transformaatio eli konveksi konjugantti. Konveksin konjugantin määritelmä on erityisen tärkeä seuraavissa luvuissa esitetyn suurten poikkeamien ja Cramérin teorioiden kannalta. Lyhyen pohdinnan kohteena ovat myös ehdollinen todennäköisyys ja odotusarvo, sekä σ-algebra ja todennäköisyysmitta. Näiden teoriat esitetään vain lyhyesti, tavoitteena tarjota ymmärrystä myöhempänä esitettävien todistusten tulkintaan. Tutkielman lopuksi esitetään peruskäsitteitä luottoriskianalyysistä sekä numeerinen sovellus, jossa tarkastellaan investment grade ja high yield -luokiteltujen yrityslainojen konkurssitodennäköisyyksiä ja sijoitussalkun tuottamia tappioita talouden eri tilanteissa.

Momentit ja momentit generoiva funktio

Aloitetaan määrittelemällä momentit sekä niitä generoiva funktio.

Määritelmä 1

Jos satunnaismuuttujalla X on jatkuva tiheysfunktio f, niin X:n odotusarvo $E(X)$ on

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

mikäli integraali on itseisesti suppeneva eli että $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$. Jos integraali ei suppene itseisesti sanotaan, että X:$llä$ ei ole odotusarvoa.

Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo määritellään vastaavasti

$$E(X) = \mu = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i f_i.$$

Määritelmä 2

Jos odotusarvo $\mu_i = E(X^i)$ on olemassa, kutsutaan sitä satunnaismuuttujan X i:nneksi momentiksi. X:n keskusmomentti määritellään käyttäen hyväksi odotusarvoa, eli satunnaismuuttujan ensimmäistä momenttia $\mu_i' = E\left[(X - \mu_1)^i\right]$. Momentti μ_i tunnetaan myös nimityksellä origomomentti. Satunnaismuuttujan X odotusarvo on siis ensimmäinen origomomentti.

Tilastotieteen ja todennäköisyysteorian piirissä momentteja generoiva funktio on vaihtoehtoinen tapa tutkia satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakaumaa. Momentit generoivan funktion eduksi voidaan katsoa mm mahdollisuus määritellä se myös vektori- tai matriisimuotoisille satunnaismuuttujille. Kaikille satunnaismuuttujille ei kuitenkaan ole mahdollista määritellä momentit generoivaa funktiota. Momentit generoivaa funktiota kutsutaan joskus myös momenttifunktioksi.

Määritelmä 3

Satunnaismuuttujan X(diskreetti tai jatkuva) momentit generoiva funktio on

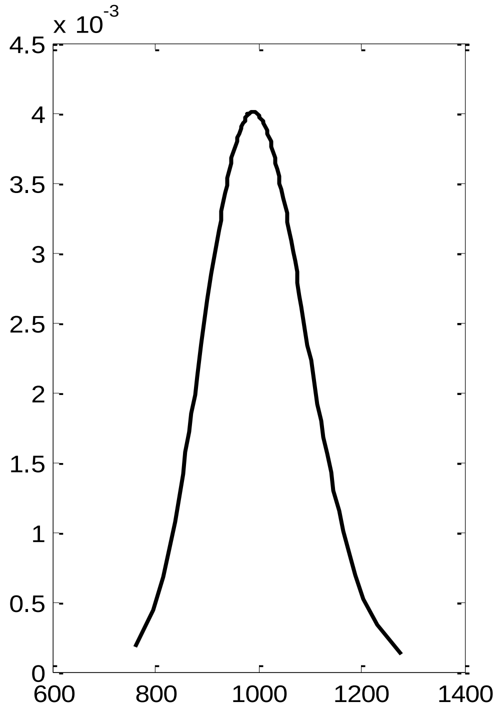
$$M_X(t) = E[e^{tX}], \qquad t \in R$$

aina kun satunnaismuuttujan X odotusarvo on määriteltävissä. Momentit generoivan funktion muodostamisessa käytetään Riemann-Stieltjes-integraalia

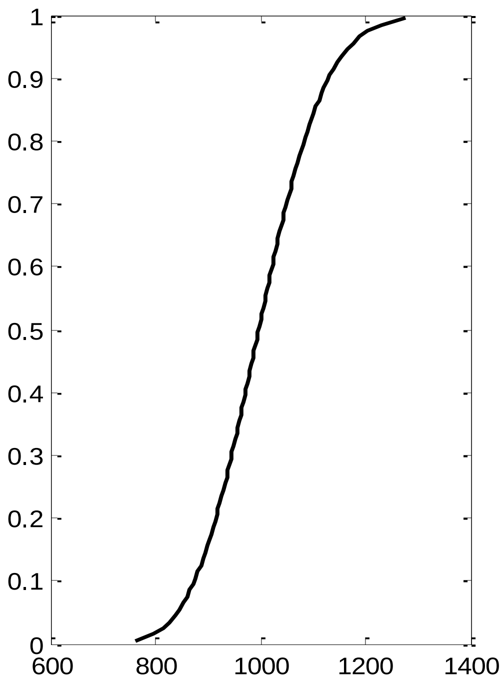
$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x).$$

$F(x)$on satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Momentit generoivan funktion olemassaolo riippuu integraalilausekkeen absoluuttisesta konvergoinnista. Mikäli funktio on olemassa, voidaan odotusarvon $E(e^{tx})$ katsoa olevan äärellinen.

$M_X(0)$ on aina olemassa ja on yhtäsuuri kuin 1. Momentit generoivan funktion kohdalla tärkeä ominaisuus on se, että jos kahdella satunnaismuuttujalla X ja Y on sama momentit generoiva funktio, niin ne ovat identtiset melkein kaikissa pisteissä. Eli jos $M_X(t) = M_Y(t)$, niin $F_X(x) = F_Y(x)$. Tätä ei kuitenkaan voida yleistää koskemaan momentteja, sillä momenttien olemassaolo ei takaa momentit generoivaan funktion olemassaoloa. Tästä esimerkkinä on logaritminen normaalijakauma.



Kuva 1a Gammajakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktio



Kuva 1b Gammajakautuneen satunnaismuuttujan kertymäfunktio

Esimerkki 1

Määritellään Gamma-jakautuneen satunnaismuuttujan $X{\sim}Gamma(r, \alpha)$ momentit generoiva funktio.

Eulerin gammafunktio määritellään kaavalla:

$$\tau(r) = \int_0^\infty x^{r-1}\, e^{-x} dx.$$

Gammajakauman tiheysfunktiot ovat muotoa $f(x) = \frac{\alpha^r}{\tau(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}$.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

$$M_X(t) = \int_0^\infty \frac{\alpha^r}{\tau(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x} e^{tx} dx$$

$$= \frac{\alpha^r}{\tau(r)} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-\alpha x + tx} dx$$

$$= \frac{\alpha^r}{\tau(r)} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-(\alpha - t)x}\, dx$$

$$= \frac{\alpha^r}{\tau(r)} \tau(r) \left(\frac{1}{\alpha - t}\right)^r$$

$$= \alpha^r \left(\frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)}\right)^r$$

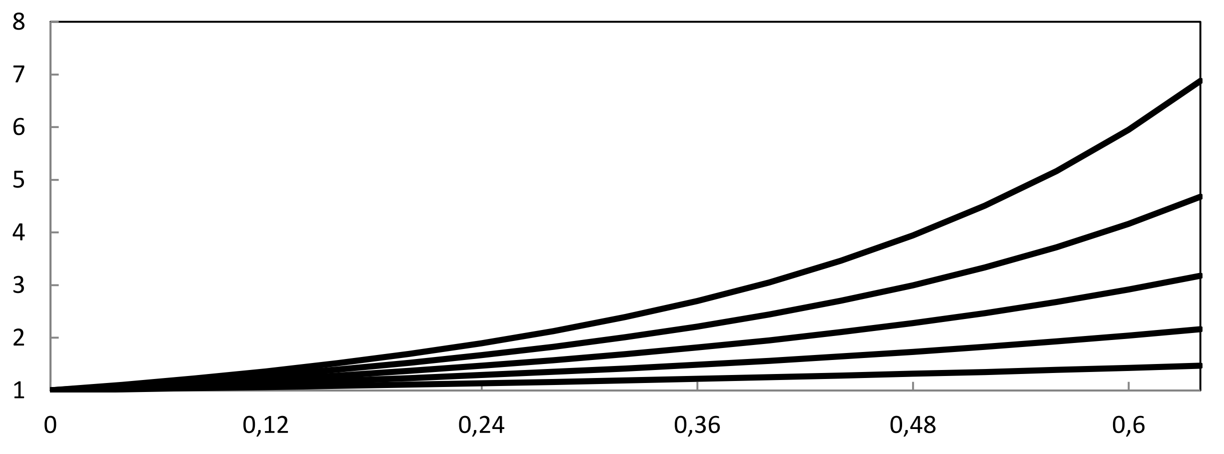
$$= \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{\alpha}}\right)^r.$$

Satunnaismuuttujan $X{\sim}Gamma(r, \alpha)$ momentit generoiva funktio on siis muotoa $\left(\frac{1}{1-\frac{t}{\alpha}}\right)^r$.

Momentit generoivan funktion avulla on helppo laskea gammajakautuneen muuttujan odotusarvo. Odotusarvo on ensimmäinen momentti, ja se saadaan selvitettyä derivoimalla momentit generoiva funktio ja tutkimalla sen arvoa kohdassa t=0.

$$M_X'(t) = (-r)\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-r-1} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{r}{\alpha\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{r+1}}.$$

$$M_X'(0) = E(X) = \frac{r}{\alpha}.$$



Kuva 2 Gammajakautuneen satunnaismuuttujan X momentit generoivia funktioita eri parametrien arvoilla

Karakteristinen funktio

Määritellään seuraavaksi karakteristinen funktio, joka tarjoaa vaihtoehtoisen tavan tutkia ja analysoida satunnaismuuttujien tiheys- ja kertymäfunktioita.

Määritelmä 4

Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio $\varphi: R \to C$ määritellään seuraavasti:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right), \quad t \in R \; ja \; i \; on \; imaginaariyksikkö$$

$$e^{itx} = \cos(tx) + i\, sin(tx), siten\; että \; \left|e^{itx}\right| = 1.$$

Tästä seuraa se, että toisin kuin momentit generoiva funktio, karakteristinen funktio on määritelty kaikille (reaalisille) satunnaismuuttujille X.

Karakteristinen funktio liittyy momentit generoivaan funktioon seuraavan kaavan kautta:

$$\varphi_X(t) = M_{iX}(t) = M_X(it).$$

Karakteristinen funktio on siis satunnaismuuttujan iX momentit generoiva funktio. Karakteristisen funktion voidaan katsoa olevan Fourier-muunnos tiheysfunktiosta.

Esimerkki 2

Määritellään gammajakautuneen satunnaismuuttujan $X \sim Gamma(r, \alpha)$ karakteristinen funktio.

Kuten aiemmin, käytetään hyväksi määritelmiä $\tau(r) = \int_0^\infty x^{r-1}\, e^{-x} dx$ ja $f(x) = \frac{\alpha^r}{\tau(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}$.

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx\, .$$

$$\varphi_X(t) = \frac{\alpha^r}{\tau(r)} \int_0^\infty x^{r-1} e^{-\alpha x + itx} dx$$

$$= \frac{\alpha^r}{\tau(r)} \tau(r) \left(\frac{1}{\alpha - it}\right)^r$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{\alpha}}\right)^r.$$

Gammajakautuneen satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio on siis $\varphi_X(t) = \left(\frac{1}{1-\frac{it}{\alpha}}\right)^r$.

Myös satunnaismuuttujan momentit on mahdollista määritellä karakteristisen funktion kautta. Mikäli n:s momentti on olemassa, voidaan karakteristinen funktio derivoida n kertaa:

$$E(X^n) = i^{-n}\varphi_X^{(n)}(0).$$

Oletettaessa aiempien esimerkkien tavoin, että satunnaismuuttuja $X \sim Gamma(r, \alpha)$, saadaan:

$$E(X^1) = i^{-1}\varphi_X^1(0) = (i^{-1})\left[-r\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-r-1}\left(\frac{-i}{\alpha}\right)\right]_{t=0} = \left[\frac{(i^{-1})ir}{\alpha\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{r+1}}\right]_{t=0} = \left[\frac{r}{\alpha\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{r+1}}\right]_{t=0} = \frac{r}{\alpha}.$$

$$E(X^2) = i^{-2}\left[-r(-r-1)\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{-r-2}\left(\frac{-i}{\alpha}\right)\left(\frac{-i}{\alpha}\right)\right]_{t=0} = i^{-2}\left[\frac{-r(-r-1)i^2}{\alpha^2\left(1-\frac{it}{\alpha}\right)^{r+2}}\right]_{t=0} = \frac{r^2+r}{\alpha^2}.$$

Yhdistämällä tulokset saadaan satunnaismuuttujan $X \sim Gamma(r, \alpha)$ varianssiksi:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{r^2+r}{\alpha^2} - \frac{r^2}{\alpha^2} = \frac{r}{\alpha^2}.$$

Kumulantit ja kumulantit generoiva funktio

Momentit generoiva ja karakteristinen funktio tarjoisivat vaihtoehtoja satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauman tutkimiseen. Kumulantit generoiva funktio puolestaan tuo tämän tarkastelun logaritmiselle tasolle.

Määritelmä 5

Kumulantit generoiva funktio määritellään momentit generoivan funktion logaritmin kautta:

$$c(t) = \log E(e^{tX}).$$

Vaihtoehtoinen tapa määritellä kumulantit generoiva funktio on käyttää karakteristista funktiota. Tällä tavoin muodostettua kumulantit generoivaa funktiota kutsutaan joskus nimityksellä *toinen karakteristinen funktio:*

$$\rho_X(t) = log\varphi_X(t) = \log(E\left(e^{itX}\right).$$

Vaihtoehtoisen määritelmän hyvänä puolena voidaan pitää sitä, että $E(e^{itX})$ on hyvin määritelty kaikilla reaaliarvoisilla t, silloinkin kun $E(e^{tX})$ ei ole hyvin määritelty kaikilla t:n arvoilla.

Määritelmä 6

Kuten momentit, myös kumulantit (κ_n) saadaan laskettua generoivan funktion derivaatan avulla.

$$\kappa_n = [\, c_X^n(t)]_{t=0}.$$

Riippumattomille satunnaismuuttujille X ja Y pätee:

$$c_{X+Y}(t) = \log M_{X+Y}(t) = \log\left(E\left(e^{t(X+Y)}\right)\right) = \log\left(E(e^{tX})\right) + \log\left(E(e^{tY})\right) = c_X(t) + c_Y(t).$$

Kun kumulantit generoiva funktio on olemassa, on se konveksi ja äärettömästi differentioituva.

Kumulantit yhtyvät keskusmomentteihin ensimmäisten kolmen kertaluvun derivaattojen kohdalla. Korkeampien kertalukujen kohdalla tämä ei enää pidä paikkaansa, vaan kumulantit ovat monimutkaisempia polynomimuunnelmia vastaavan kertaluvun keskusmomenteista.

Esimerkki 3

Määritellään $X \sim Gamma(r, \alpha)$ jakautuneen satunnaismuuttujan ensimmäinen ja toinen kumulantti kumulantit generoivan funktion avulla.

Kuten aiemmin, käytetään hyväksi määritelmiä $\tau(r) = \int_0^\infty x^{r-1}\, e^{-x} dx$ ja $f(x) = \frac{\alpha^r}{\tau(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}$, sekä $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-\frac{t}{\alpha}}\right)^r$.

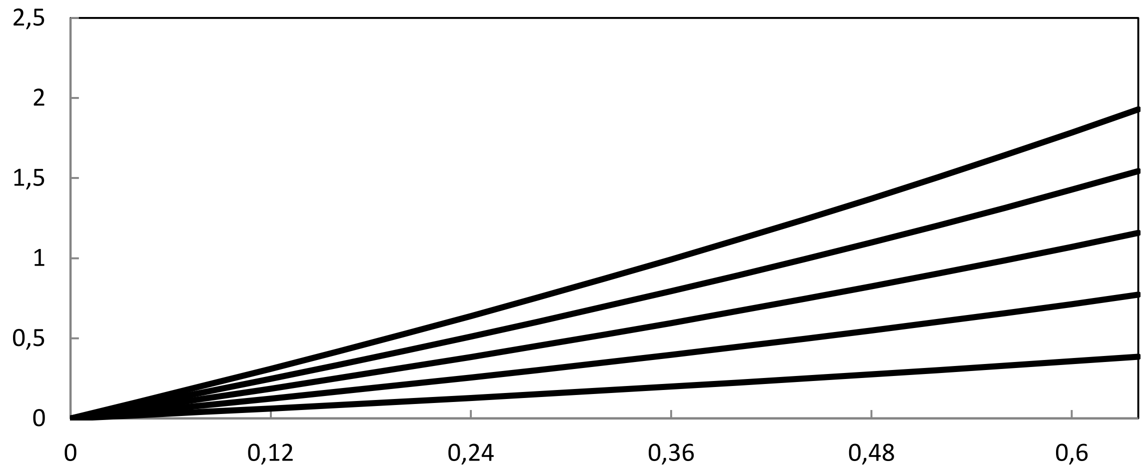
$$c_X(t) = \log M_X(t) = \log\left(E(e^{tX})\right).$$

$$c_X(t) = \log\left(\frac{1}{1-\frac{t}{\alpha}}\right)^r = log\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^{-r}.$$

$$c'_X(0) = \left[\frac{1}{\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^{-r}}(-r)\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^{-r-1}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right]_{t=0} = \left[\frac{r}{\alpha\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)}\right]_{t=0} = \frac{r}{\alpha}.$$

$$c''_X(0) = \left[\frac{r}{\alpha}(-1)\frac{1}{\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^2}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right]_{t=0} = \left[\frac{r}{\alpha^2\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^2}\right]_{t=0} = \frac{r}{\alpha^2}.$$

Tästä nähdään, että toisen kertaluvun kumulantti on yhtä kuin toisen kertaluvun keskusmomentti, eli varianssi, sillä $c''_X(0) = \frac{r}{\alpha^2} = Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{r^2+r}{\alpha^2} - \frac{r^2}{\alpha^2} = \mu'_2$. Vastaavasti ensimmäisen kertaluvun kumulantti on yhtä kuin ensimmäisen kertaluvun keskusmomentti, eli odotusarvo.



Kuva 3 Gammajakautuneen satunnaismuuttujan X kumulantit generoivia funktioita eri parametrien arvoilla

Jakauman vinous

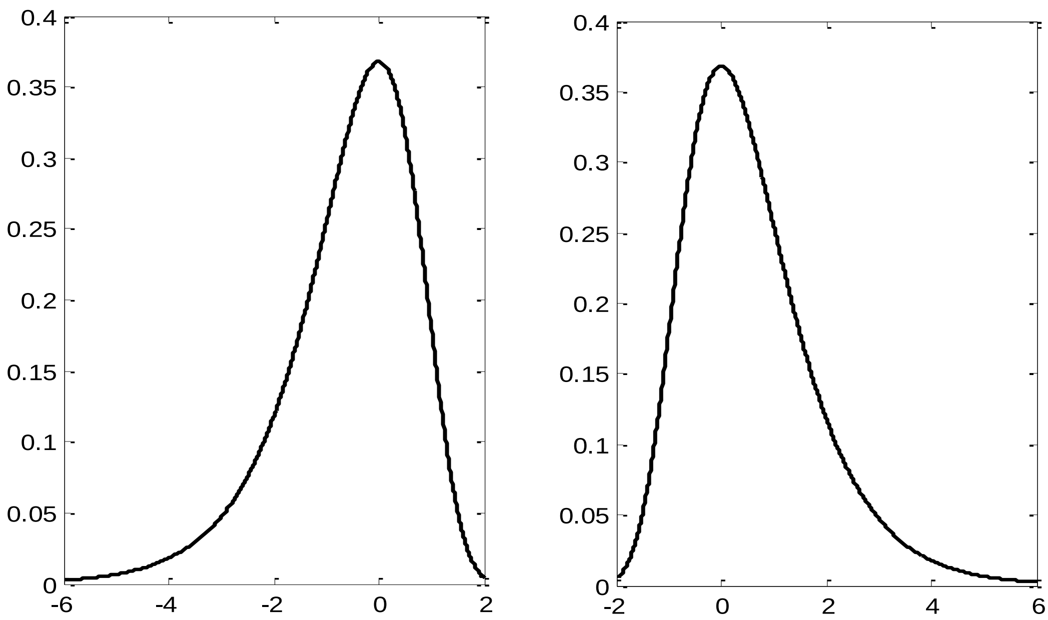
Satunnaismuuttujan jakauman vinoudella tutkitaan jakauman muotoa ja erityisesti sen epäsymmetrisyyttä. Satunnaismuuttujan arvoja verrataan keskiarvoon ja jakauman sanotaan olevan vino, jos suurin osa havainnoista on keskiarvoa suurempia tai pienempiä.

Määritelmä 7

Satunnaismuuttujan X vinous voidaan määritellä käyttäen hyväksi keskusmomentteja μ' tai kumulantteja κ

$$\gamma = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \left[\frac{\mu_3'}{\sigma^3}\right] = \frac{E((X-\mu)^3)}{E((X-\mu)^2)^{3/2}} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}.$$

Kun $\gamma < 0$ on kyse negatiivisesta eli vasemmalle vinosta jakaumasta. Tällä tarkoitetaan tilannetta, jossa jakauman vasen häntä on oikeaa pidempi. Todennäköisyysmassa on keskittynyt oikealle. Jos $\gamma > 0$ on kyseessä positiivinen eli oikealle vino jakauma. Nyt oikea häntä on vasenta pidempi ja todennäköisyysmassa on keskittynyt vasemmalle puolelle keskiarvoa.



Kuva 4a Vasemmalle vino jakauma　　Kuva 4b Oikealle vino jakauma

Vinouden avulla pystytään päättelemään jakauman ”nojaussuunta”, mutta ei hännän tarkkaa muotoa. Pitkällä hännällä tarkoitetaan tilannetta, jossa epätavallisen suuri osa tapahtumista poikkeaa suuresti keskiarvosta. Paksuhäntäisen jakauman tilanteessa tarkoitetaan jakaumaa, jolla on esimerkiksi normaalijakaumaan verrattuna epätavallisen suuri todennäköisyysmassa hännissään.

Esimerkki 4

Lasketaan $X \sim Gamma(r, \alpha)$ jakautuneen satunnaismuuttujan vinous käyttäen hyväksi kumulantteja.

Aiemmista esimerkeistä on jo saatu

$$\kappa_2 = c''_X(0) = \frac{r}{\alpha^2}\,.$$

Selvitetään seuraavaksi kolmas kumulantti

$$c'''_X(0) = \left[\frac{r}{\alpha^2}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)(-2)\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^{-3}\right]_{t=0} = \left[\frac{2r}{\alpha^3\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)^3}\right]_{t=0} = \frac{2r}{\alpha^3}\,.$$

Käyttämällä hyväksi kumulantteja saadaan jakauman vinous

$$\gamma = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} = \frac{\frac{2r}{\alpha^3}}{\left(\frac{r}{\alpha^2}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{2r}{\alpha^3}}{\frac{r\sqrt{r}}{\alpha^3}} = \frac{2r}{r\sqrt{r}} = \frac{2}{\sqrt{r}}\,.$$

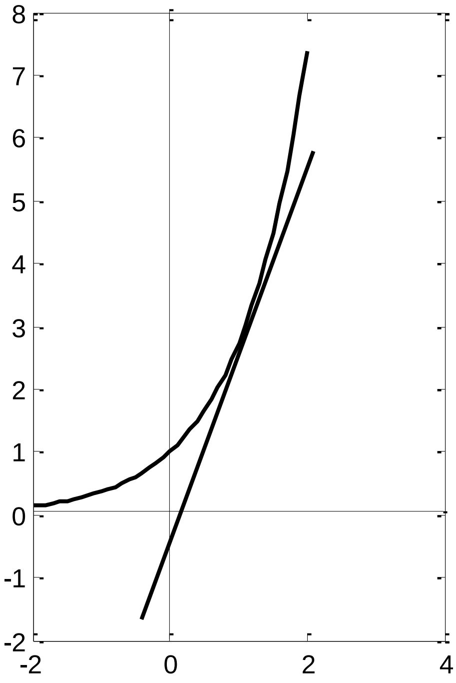
Gamma-jakautuneen satunnaismuuttujan vinouteen vaikuttaa siis vain parametri r, joka määrittelee jakauman muodon.

Legendre-muunnos

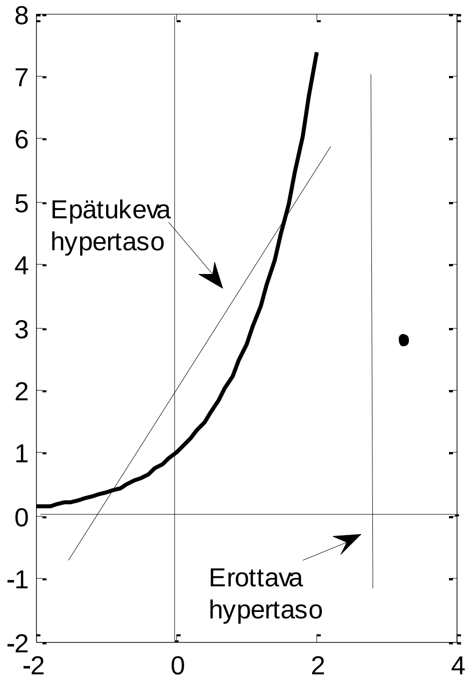
Oletetaan konveksi funktio $f: R \rightarrow R$. Merkitään funktion epigraafia $A = \{(x,z)|z \geq f(x)\}$. Tärkeää on huomioida, että epigraafi sisältää siis konveksin funktion $f(x)$piirtämän ”käyrän”, sekä sen yläpuolelle jäävän massan. Konveksin funktion epigraafin voidaankin siis katsoa olevan konveksi joukko. Tutkitaan seuraavaksi hypertasoja (tai käyriä, riippuen käytetystä dimensiosta). Konveksia joukkoa tukevaksi hypertasoksi kutsutaan hypertasoa, joka kohtaa konveksin joukon niin, että koko konveksi joukko jää hypertason ”toiselle puolelle” lukuun ottamatta pisteitä, joissa hypertaso ja konveksi joukko yhtyvät. Näitä pisteitä kutsutaan rajapisteiksi.

Esimerkki 4

Yksinkertainen esimerkkitapaus on ajatella funktiota $f(x) = e^x$. Nyt funktio $f(x)$ on konveksi ja sitä tukevat hypertasot ovat muotoa $g(x) = mx + c$. Nyt mikäli m on negatiivinen, on kyseessä laskeva suora ja tämä ei koskaan muodosta tukevaa hypertasoa funktiolle $f(x)$, riippumatta siitä, miten vakio c valitaan. Tapauksessa $m \geq 0$ on $g(x)$, joko vaakasuora vakio tai nouseva suora. Nyt etsimällä ne arvot, joiden kohdalla $g(x)$ ensimmäistä kertaa kohtaa funktion $f(x)$ saadaan konveksia funktiota tukeva hypertaso.



Kuva 5a Konveksia funktiota tukeva hypertaso



Kuva 5b Konveksi funktio ja sitä epätukeva ja erottava hypertaso

Ajatellaan seuraavaksi c:tä m:n funktiona. Jokaisella m:llä on olemassa ainakin yksi c, siten että $g(x)$ muodostaa tukevan hypertason funktiolle $f(x)$. Kun edellä esitettyä ajatusta viedään vielä pidemmälle voidaan ajatella, että jotta funktio g muodostaa tukevan hypertason funktiolle f on oltava niin, että $c = -h(m)$. Funktiota h voidaan nyt kutsua funktion f Legendre-transformaatioksi. Funktiota h ei välttämättä ole määritelty koko tasossa R, vaan riittää, että se on määritelty konveksissa alijoukossa. Tavallista on asettaa funktion $h(m)$ arvot äärettömiksi niillä m, joilla se muuten ei olisi määritelty. Edellä esitetyn nojalla on yksinkertaista nähdä Legendre-transformaation geometrinen tulkinta. Merkinnän $c = -h(m)$ avulla voidaan nähdä, että Legendre-transformaatio on suoran $g(x) = mx + c$ ja y-akselin leikkauspisteen etäisyys origosta.

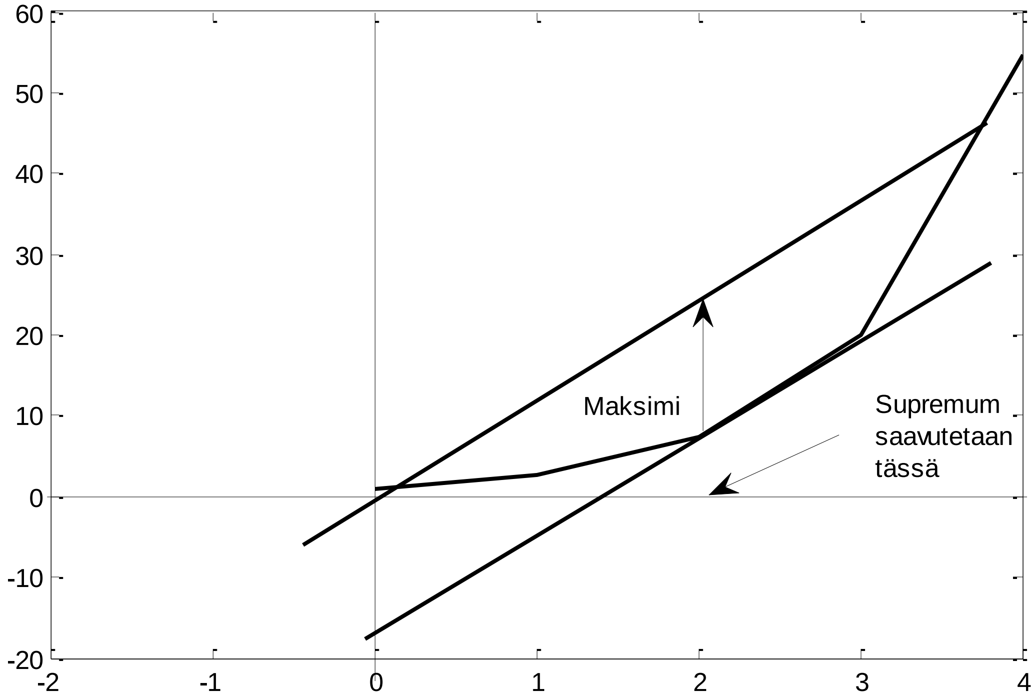
Legendre-transformaation tarkan määritelmän saamiseksi on palattava ajatukseen funktion f ja suoran g kohtaamisesta niin, että g muodostaa funktiota f tukevan hypertason. g:n ja f:n kohtaamispisteen löytämiseksi voidaan ajatella aloitettavan pienestä vakion c arvosta, jota kasvatetaan kunnes g muodostaa tukevan hypertason. Tarkoituksena on siis etsiä c:n pienin arvo tai infimum, jolla g ja f kohtaavat. Tutkitaan siis kaikkien niiden arvojen c joukko, joilla g kohtaa funktion f ja valitaan tästä joukosta infimum. Tämä joukko löydetään pitämällä m kiinteänä ja tutkimalla sen sijaan millä c:n arvolla funktion f pisteet $\left(x_0, f(x_0)\right)$ ja g leikkaavat. Pisteen $\left(x_0, f(x_0)\right)$ läpi kulkeva suora, jonka kulmakerroin on m, on siis muotoa $g(x) - f(x_0) = m(x - x_0)$. Tästä saadaan y-akselin leikkauspisteeksi $-mx_0 + f(x_0)$. Nyt infimum c, jolla g kohtaa funktion f, on $inf_{x_0} - mx_0 + f(x_0)$. Legendre-muunnos on tämän vastakohta ja esitetään seuraavaksi virallinen määritelmä.

Määritelmä 7

Oletetaan väli $I \subset R$ ja konveksi funktio $f: I \to R$. Nyt funktion f Legendre-muunnos $f^*: I^* \to R$ on

$$f^*(x^*) = sup_{x \epsilon I}\left(x^* x - f(x)\right), \;\; x^* \epsilon\, I^*, \;\; I^* = \{x^* : sup_{x \epsilon I}(x^* x - f(x)) < \infty\}$$

$f: n$ ollessa konveksi, on muunnos aina hyvin määritelty.



Kuva 6 Legendre-muunnos

Legendre-Fenchel eli konveksi konjukanttimuunnos

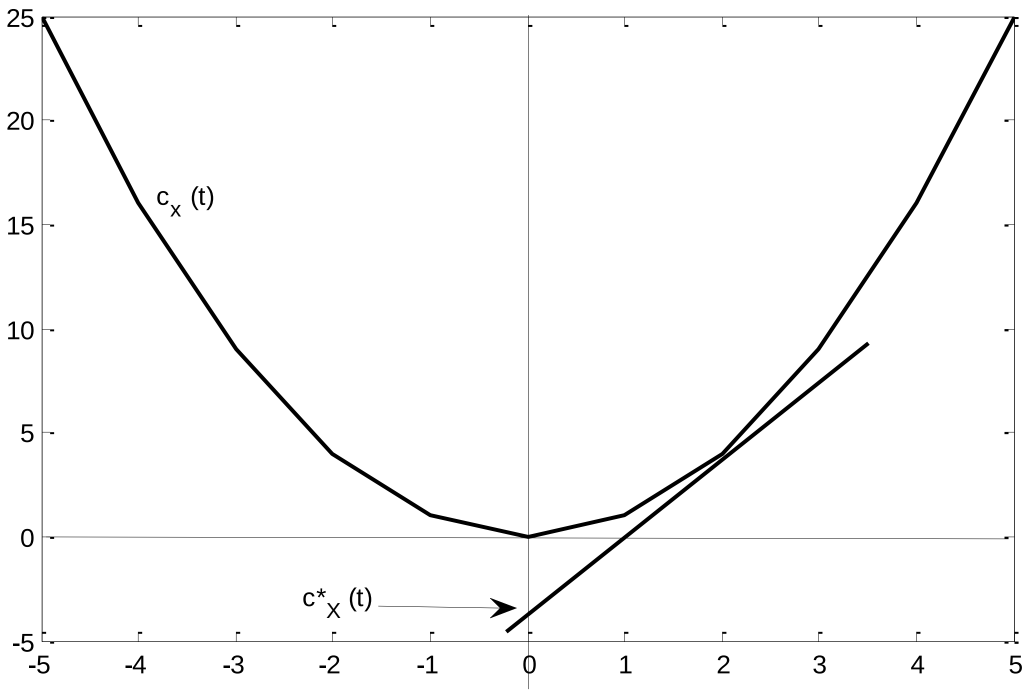
Legendre-muunnoksen yleistettyä muotoa kutsutaan Legendre-Fenchel-muunnokseksi, eli konveksiksi konjugantiksi.

Määritelmä 8

Kumulantit generoivan funktion $c_X(t)$ konveksi konjugantti (eli Legendre-Fenchel-muunnos) voidaan määritellä:

$$c_X^*(v) = sup_{t \epsilon R}\{tv - c_X(t)\},$$

missä $c_X(t)$ on kumulantit generoiva funktio.



Kuva 7 Legendre-Fenchel-muunnos, eli konveksi konjukantti

Esitetään ja todistetaan seuraavaksi lause, joka käsittelee konveksin konjugantin ominaisuuksia.

Lause 1

a) Sekä $c_X(t)$ että $c_X^*(v)$ ovat konvekseja funktioita.

b) Otetaan käyttöön merkinnät $\bar{x} = E[X_1], D_c = \{ : c(\lambda) < \infty\}$ ja $D_{c^*} = \{: \ c^*(x) < \infty\}$.

Jos $D_c = \{0\}$, niin c^* on identtisesti 0. Lisäksi jos $c(\lambda) < \infty$ jollakin $\lambda > 0$, niin $\bar{x} < \infty$ ja kaikilla $x \geq \bar{x}$

$c^*(x) = sup_{\lambda \geq 0}[\lambda x - c(\lambda)]$ ja kun $x > \bar{x}$ on $c^*(x)$ epävähenevä funktio.

Vastaavasti jos $c(\lambda) < \infty$ jollakin $\lambda < 0$ niin $\bar{x} > -\infty$ ja kaikilla$x \leq \bar{x}$ $c^*(x) = sup_{\lambda \leq 0}[\lambda x - c(\lambda)]$ on epäkasvava kun $x < \bar{x}$.

Kun $\bar{x}$ on äärellinen, niin $c^*(\bar{x}) = 0$, ja aina $inf_{x \epsilon R}\ c^*(x) = 0$.

$c)$ $c(\cdot)$ on differoituva $D_c^O$$:ssa$ ja $c'(\eta) = \frac{1}{M(\eta)} E[X_1 e^{\eta X_1}]$ ja $c'(\eta) = y \rightarrow c^*(y) = \eta y - c(\eta)$.

Todistus

$a)$ Kumulantit generoivan funktion $c_X(t)$ konveksisuus saadaan esiin Hölderin epäyhtälön[1] avulla:

$$c_X(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = logE\left(e^{(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)X}\right) = logE\left(e^{(\alpha t_1 X)} e^{((1-\alpha)t_2 X)}\right)$$

$$\leq logE(e^{\alpha t_1 X}) E\left(e^{(1-\alpha)t_2 X}\right) = \alpha c_X(t_1) + (1-\alpha)c_X(t_2),$$

kun $0 \leq \alpha \leq 1$.

Konveksin konjugantin konveksisuus saadaan suoraan määritelmää hyväksi käyttäen:

$$c_X^*(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$$

$$= sup_{v \epsilon R}\{(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)v - c_X(v)\}$$

$$\leq sup_{v \epsilon R}\{\alpha x_1 v + (1-\alpha)x_2 v - \alpha c_X(v) + \alpha c_X(v) - c_X(v)\}$$

$$= sup_{t \epsilon R}\{\alpha x_1 v - \alpha c_X(v) + (1-\alpha)x_2 v - (1-\alpha)c_X(v)\}$$

$$= sup_{v \epsilon R}\{\alpha x_1 v - \alpha c_X(v)\} + sup_{v \epsilon R}\{(1-\alpha)x_2 v - (1-\alpha)c_X(v)\}$$

$$= \alpha c_X^*(v) + (1-\alpha)c_X^*(v).$$

$b)$ Jos $D_c = \{0\}$, niin silloin voidaan kirjoittaa $c^*(x) = c(0) = 0$ kaikilla $x \,\epsilon\, R$.

Jos $c(\lambda) = \log M(\lambda) < \infty$ jollakin $\lambda > 0$, niin $\int_0^\infty x d\mu < \frac{M(\lambda)}{\lambda} < \infty$, eli $\bar{x} = E[X_1] < \infty$. Nyt kaikille $\lambda \,\epsilon\, R$ saadaan käyttäen Jensenin epäyhtälöä[2] (tässä käytetään tulosta konkaavin funktion tapauksessa)

$$c(\lambda) = \log E\left[e^{\lambda X_1}\right] \geq E\left[\log e^{\lambda X_1}\right] = E[\lambda X_1] = \lambda \bar{x}.$$

Tarkastellaan vielä tilannetta, jossa $\bar{x} = -\infty$. Tällöin $c(\lambda) \geq \lambda \bar{x} = \infty$, kun $\lambda < 0$ ja tulos $c^*(x) = sup_{\lambda \geq 0}[\lambda x - c(\lambda)]$ pitää triviaalisti paikkansa.

Kun $\bar{x}$ on äärellinen, niin $c^*(\bar{x}) = 0$ ja kaikilla $x \geq \bar{x}$ ja $\lambda < 0$

$$\lambda x - c(\lambda) \leq \lambda \bar{x} - c(\lambda) \leq c^*(\bar{x}) = 0,$$

josta saadaan väite $c^*(x) = sup_{\lambda \geq 0}[\lambda x - c(\lambda)]$. Tämän nojalla nähdään myös, että $c^*(x)$ on monotoninen määrittelyjoukossa $(\bar{x}, \infty)$, sillä kaikilla $\lambda \geq 0$ funktio $\lambda x - c(\lambda)$ voidaan määritellä $x$$:n$ epäkasvavana funktiona.

---

[1] Hölderin epäyhtälö: Oletetaan $p > 1$ ja $q > 1$ sekä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nyt $E[|XY|] \leq E^{\frac{1}{p}}[|X|^p] E^{\frac{1}{q}}[|Y|^q]$.

[2] Jensenin epäyhtälö: Oletetaan konveksi funktio $\varphi(\cdot)$ ja satunnaismuuttuja$X$. Nyt $\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$.

Väitteen $c^*(x) = sup_{\lambda \le 0}[\lambda x - c(\lambda)]$ todistus seuraa vastaavasti, kun oletetaan että $c(\lambda) < \infty$ jollakin $\lambda < 0$. Tutkimalla satunnaismuuttujan $-X$ kumulantit generoivaa funktiota saadaan edellä esitetyllä tavalla näkyviin funktion $c^*(x)$ monotonisuus määrittelyjoukossa $(-\infty, \bar{x})$.

Viimeiseksi on vielä todistettava, että $inf_{x \epsilon R}\, c^*(x) = 0$. Yllä nähtiin jo, että mikäli $D_c = \{0\}$ niin $c^* = 0$ ja kun $\bar{x}$ on äärellinen, niin $c^*(\bar{x}) = 0$. Nyt on siis tutkittava tapauksia, joissa $\bar{x} = -\infty$ tai $\bar{x} = \infty$. Oletetaan siis, että $\bar{x} = -\infty$ ja että $c(\lambda) < \infty$ jollakin $\lambda > 0$ (tapaus $\bar{x} = \infty$, kun $c(\lambda) < \infty$ jollakin $\lambda < 0$ seuraa samalla tavalla, kun kumulantit generoivan funktion tapauksessa tutkitaan satunnaismuuttujaa $-X$).

Käyttämällä Chebychevin epäyhtälöä[3] ja $c^*(x) = sup_{\lambda \ge 0}[\lambda x - c(\lambda)]$ saadaan

$$\log \mu\big([x,\infty)\big) \le inf_{\lambda \ge 0} E\big[e^{\lambda(X_1 - x)}\big] = -sup_{\lambda \ge 0}\,\{\lambda x - c(\lambda)\} = -c^*(x),$$

joten

$$\lim_{x \to -\infty} c^*(x) = \lim_{x \to -\infty} sup_{\lambda \ge 0}\,\{\lambda x - c(\lambda)\} \le \lim_{x \to -\infty}\big\{-\log \mu\big([x,\infty)\big)\big\} = 0,$$

joten $inf_{x \epsilon R} c^*(x) = 0$ seuraa tästä.

c) Aloitetaan todistamalla yhtälö $c'(\eta) = \frac{1}{M(\eta)} E[X_1 e^{\eta X_1}]$. Käytetään hyväksi dominoidun konvergenssin lausetta[4] , jonka perusteella voidaan vaihtaa differoinnin ja integroinnin järjestystä.

$$f_\varepsilon(x) = \frac{e^{(\eta+\varepsilon)x} - e^{\eta x}}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} x e^{\eta x}.$$

Kun valitaan $\varepsilon\, \epsilon (-\delta, \delta)$, voidaan arvioida funktiota $f_\varepsilon(x)$, sekä ottaa käyttöön apumerkintä $h(x)$

$$|f_\varepsilon(x)| \le \frac{e^{\eta x}\big(e^{\delta|x|} - 1\big)}{\delta} = h(x).$$

$E[|h(X_1)|] < \infty$, kun $\delta > 0$ on valittu tarpeeksi pieneksi.

Aloitetaan väitteestä $c'(\eta) = y$ ja otetaan käyttöön konkaavi apufunktio $g(\lambda) = \lambda y - c(\lambda)$. Nyt funktio saavuttaa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa, joten kirjoittamalla $g'(\eta) = 0$ saadaan

$g(\eta) = sup_{\lambda \epsilon R}\, g(\lambda)$ josta seuraa $c'(\eta) = y \to\; c^*(y) = \eta y - c(\eta)$.

Esimerkki 5

Määritellään $X \sim Gamma(r, \alpha)$-jakautuneen satunnaismuuttujan Legendre-Fenchel-transformaatio $c_X^*(x) = sup_{t \epsilon R}\{tx - c_X(t)\}$. Aiempien esimerkkien avulla on todettu, että gamma-jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan kumulantit generoiva funktio $c_X(t)$ on $c_X(t) = log\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-r}$.

---

[3] Käytetään hyväksi Chebychevin epäyhtälön sovellusmuotoa: $P(X \ge n) \le e^{-nt}E(e^{Xt}), t > 0$

[4] Dominoidun konvergenssin lause: Oletetaan sarja $\{f_n\}$ mitallisia funktioita, joka suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota $f(x)$. Jos on olemassa mitallinen funktio $g(x) \ge 0$ siten että
$i)$ $\int g(x)dx < \infty$
$ii)$ kaikilla n, $|f_n(x)| \le g(x)$ silloin
$\lim_{n \to \infty} \int f_n(x)dx = \int \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx = \int f(x)dx$ ja $\int |f(x)|dx < \infty$

Määritellään seuraavaksi c^* ja otetaan käyttöön apufunktio $g(t)$

$$c^* = \underbrace{tx - \log\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{-r}}_{g(t)}.$$

$$g'(t) = x + r\left(\frac{1}{1 - \frac{t}{\alpha}}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = x - \frac{r}{\alpha - t}.$$

Etsitään seuraavaksi apufunktion derivaatan nollakohta

$$g'(t) = 0 \leftrightarrow x = \frac{r}{\alpha - t} \rightarrow x(\alpha - t) = r \rightarrow t = \alpha - \frac{r}{x}.$$

Tästä seuraa, että

$$c^*(x) = \left(\alpha - \frac{r}{x}\right)x - \log\left(1 - \frac{\alpha - \frac{r}{x}}{\alpha}\right)^{-r} = \frac{\alpha}{x} - r - \log\left(\frac{r}{\alpha x}\right)^{-r}.$$

σ −algebra, todennäköisyysmitta ja ehdollinen odotusarvo

σ-algebran käsite on mittateorian keskeinen osa-alue. Sen ymmärtäminen on tärkeää erityisesti Lebesguen integraalin määritelmän, sekä todennäköisyysteorian kannalta. σ-algebraa pohdittaessa voidaan miettiä tilannetta, jossa tutkittavista tapahtumista muodostetaan uusia numeroituvien joukko-operaatioiden avulla. Todennäköisyyden määrittelyjoukon vaatimus on, että se on suljettu tällaisten joukko-operaatioiden suhteen, eli on ns. σ-algebra.

Määritelmä 9

Oletetaan, kokoelma A joukon Ω osajoukkoja. Nyt voidaan sanoa, että A on σ-algebra, mikäli:

$i)$ Perusjoukko $\Omega \epsilon A$.

$ii)$ Jos $X \epsilon A$, niin myös $X^c \epsilon A$.

$iii)$ Jos $X_n \epsilon A$ kaikilla $n \epsilon N$, niin $\bigcap X_n \epsilon A$.

Esimerkki 6

Oletetaan joukko $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Yksi mahdollinen σ-algebra on joukko $A = \big\{\{\emptyset\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\big\}$.

Määritelmä 10

Oletetaan $C \subset P(\Omega)$, $\Omega \neq \emptyset$. Kokoelman C virittämä σ-algebra on pienin σ-algebra, joka sisältää kokoelman C

$$\sigma(C) = \bigcap \{A : A \; on \; \sigma - algebra \; ja \; C \subset A\}.$$

Tutkitaan seuraavaksi mitan ja erityisesti todennäköisyysmitan käsitteitä. Todennäköisyysmitalla tarkoitetaan reaaliarvoista funktiota, joka on määritelty todennäköisyysavaruuden tapahtumajoukossa ja toteuttaa mitalta vaaditut ominaisuudet.

Määritelmä 11

Oletetaan pari (Ω, A) niin, että A on perusjoukon Ω σ-algebra ja siis mitallinen avaruus. Joukot $X \epsilon A$ ovat mitallisia joukkoja.

P on todennäköisyysmitta jos ja vain jos P on mitta ja $P(\Omega) = 1$. Todennäköisyyslaskenta on siis mittateorian erikoistapaus, jossa huomio kiinnitetään vain niihin mittoihin P, jotka on normeerattu ykköseen. Esitetään seuraavaksi todennäköisyysmitan P virallinen määritelmä.

Määritelmä 12

Määritellään funktio $f: A \rightarrow [0,1]$. Nyt voidaan sanoa, että P on todennäköisyysmitta, mikäli:

$i)$ $P[\Omega] = 1$.

$ii)$ Jos erilliset tapahtumat $X_n \epsilon A$ ja $n \epsilon N$, niin $P[\bigcup X_n] = \sum P[X_n]$.

Ominaisuutta ii) kutsutaan σ- additiivisuudeksi. Tavallisella äärellisellä additiivisuudella tarkoitetaan, sitä että $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$, kun A ja Bovat erillisiä eli $A \cap B = \emptyset$.

σ- additiivisuus tuo äärelliseen additiivisuuteen lisäksi monotonisen jatkuvuuden.

Yhdistämällä edelliset määritellään vielä todennäköisyysavaruuden käsite.

Määritelmä 13

Kolmikko (Ω, A, P)on todennäköisyysavaruus.

Todennäköisyyslaskennan piirissä ehdollisella odotusarvolla tarkoitetaan satunnaismuuttujan odotusarviota huomioiden ehdollinen todennäköisyysjakauma. Tästä syystä ehdollisen odotusarvon käsite liittyy oleellisesti ehdolliseen todennäköisyyteen.

Määritelmä 14

Tapahtuman A todennäköisyys ehdolla B on

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tällä kuvaillaan A: n sattumista olettaen, että tiedämme tapahtuman B sattuneen.

Ehdollisen todennäköisyyden ymmärtämiseksi voidaan käsitellä määritelmää aluksi yksinkertaistetussa tilassa, virallinen määritelmä esitetään jäljempänä.

Oletetaan diskreetit satunnaismuuttujat X ja Y. Satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo olettaen tapahtuma $Y = y$ voidaan ajatella seuraavasti:

$$E(X|Y = y) = \sum_{x \epsilon \tilde{X}} xP(X = x|Y = y) = \sum_{x \epsilon \tilde{X}} x \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)},$$

missä $x \epsilon \widetilde{X} = X$: n määrittelyjoukko.

Vastaavasti jatkuvien satunnaismuuttujien X ja Y kohdalla voidaan muodostaa:

$$E(X|Y = y) = \int x f_X(x|Y = y)dx.$$

Ehdollisen odotusarvon varsinainen määritteleminen on huomattavasti monimutkaisempaa ja joudumme käyttämään apuna mm. Radonin ja Nikodymin derivaattaa.

Määritelmä 15

Olkoon $G \subset F$ ali-σ-algebra. Oletetaan lisäksi satunnaismuuttuja X. Nyt voidaan määritellä, että X: n ehdollinen oletusarvo on melkein varmasti yksikäsitteinen satunnaismuuttuja $E(X|G)$, jolle

$$E[E(X|G)1_A] = E(X1_A)$$

kaikilla $A \epsilon G$.

Ehdollinen odotusarvo $E(X|Y)$, missä Y on satunnaismuuttuja, voidaan nyt määritellä seuraavasti:

$$E(X|Y) = E\big(X\big|\sigma(Y)\big).$$

Ehdollinen odotusarvo $E(X|Y)$ on siis $\sigma(Y)$-mitallinen satunnaismuuttuja.

Suurten poikkeamien teoria

Todennäköisyysteorian piirissä suurten poikkeamien teoriaa käytetään tutkimaan satunnaismuuttujien asymptoottisten häntätodennäköisyyksien kulkua. Tutkimme siis todennäköisyysmittojen erityisiä äärimmäisiä ilmiöitä häntätodennäköisyyksissä, kun havaintojen määrä kasvaa suureksi. Usein kiinnostuksen kohteena on harvinaisen tapahtuman todennäköisyyden lisäksi se, miten systeemi toimii, kun äärimmäinen ilmiö tapahtuu. Kiinnostuksen suurten poikkeamien teoriaa kohtaan voidaan katsoa alkaneen yrityksestä viedä keskeistä raja-arvolausetta yhden askeleen pidemmälle.

Esimerkki 7

i) Vakuutusyhtiön näkökulmasta saadut vakuutusmaksut ovat etukäteen tiedossa, mutta mahdollinen korvausvastuu on hämärän peitossa. Jotta yhtiö pysyisi pystyssä, on saatujen vakuutusmaksujen ylitettävä korvausvastuu. Tutkittava ongelma on siis suurten poikkeamien teorian kaltainen kysymys. Mille tasolle vakuutusmaksu on asetettava, jotta yhtiön saamat tulot ylittävät kustannukset?

ii) Kommunikaatioteknologian piirissä harvinaisella tapahtumalla voidaan tarkoittaa esimerkiksi systeemin ylikuormittumista tai rikkoutumista. Tässä tapauksessa suurten poikkeamien teoriaa voitaisiin hyötykäyttää sen tutkimiseen, kuinka systeemi kannattaa organisoida, jotta tällaiset tilanteet voidaan välttää, tai ainakin niiden todennäköisyys saataisiin minimoitua.

Suurten poikkeamien teoria rajoittaa mittaperhettä $\{\mu_n\}$ vauhtifunktion I avulla, kun $\varepsilon \to 0$. Tässä X on topologinen avaruus, joten sen avoimet ja suljetut alijoukot ovat hyvin määriteltyjä.

Määritelmä 16

Vauhtifunktio I on alhaalta puolijatkuva kuvaus $I: X \to [0, \infty)$ siten että kaikilla $\alpha \, \epsilon \, [0, \infty)$ joukko $\psi_I(\alpha) = \{: I(x) \leq \alpha\}$ on suljettu alijoukko avaruudessa X. Hyvä vauhtifunktio on sellainen funktio, jolla kaikki joukot $\psi(\alpha)$ ovat kompakteja alijoukkoja avaruudessa X. Otetaan vielä käyttöön merkintä $D_I = \{: I(x) < \infty\}$, jolla tarkoitetaan I:n tehokasta määrittelyjoukkoa.

Vauhtifunktion hyvyydestä seuraa se, että sen infimum saavutetaan suljetuissa joukoissa.

Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät, joukon $\mathbb{\Gamma}$ sulkeumaa merkitään $\bar{\mathbb{\Gamma}}$, sisäpisteitä $\mathbb{\Gamma}^0$ ja komplementtia $\mathbb{\Gamma}^c$.

Määritelmä 17

Mitan $\{\mu_\varepsilon\}$ voidaan sanoa noudattavan suurten poikkeamien teoriaa vauhtifunktiolla I, jos kaikilla $\mathbb{\Gamma} \, \epsilon \, B$

$$-inf_{\,x \,\epsilon\, \mathbb{\Gamma}^0} I(x) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} inf \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\mathbb{\Gamma}) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} sup \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\mathbb{\Gamma}) \leq -inf_{\,x \,\varepsilon\, \bar{\mathbb{\Gamma}}} I(x).$$

Yhtenä suurten poikkeamien teorian tärkeimmistä tuloksista pidetään ns. Cramérin lausetta. Verrattuna aiempiin tarkasteluihin Cramér käytti todistuksessaan hyväksi mittamuunnosta (Esscher), jonka avulla hän tulosti suurten poikkeamien alaraja-arvon. Toinen merkittävä oivallus Cramérin lauseen todistuksessa oli käyttää hyväksi Chernoffin työtä Chebychevin epäyhtälön parissa. Myös konveksi analyysi on merkittävässä roolissa Cramérin työssä, sillä Legendre- Fenchel-transformaatio on tärkeässä roolissa vauhtifunktion määrittämisessä. Seuraavassa luvussa päästään tarkemmin käsiksi Cramérin teoriaan ja sen todistukseen.

Cramérin lause

Suurten poikkeamien teorian alun yhtenä merkittävimmistä vaikuttajista pidetään ruotsalaista matemaatikkoa Harald Craméria, joka käytti teoriaa erityisesti työssään vakuutusmatematiikan sovellusten parissa.

Esitetään seuraavaksi Cramérin lauseena tunnettu tulos käyttäen hyväksi aiemmissa luvuissa esitettyjä ominaisuuksia. Tässä esitetään tulos, jossa oletetaan satunnaismuuttujien X_i olevan riippumattomia sekä samoin jakautuneita. Tärkeä käsite on edellisissä luvuissa esitelty Legendre-Fenchel-muutos eli konveksi konjugantti, johon joskus viitataan suurten poikkeamien teorian yhteydessä myös nimellä vauhtifunktio. Cramérin lauseessa kiinnitetäänkin siis erityinen huomio todennäköisyyksien häviämisvauhteihin.

Lause2 (Cramérin lause)

Oletetaan X_i, mitta $\{\mu_n\}$ sekä konveksi konjugantti $c^*(x)$. Nyt voidaan sanoa, että $\{\mu_n\}$ noudattaa suurten poikkeamien teoriaa siten, että

$i)$ kaikilla suljetuilla joukoilla $F \subset \mathrm{R}$

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{n} \log \mu_n(F) \leq -inf_{v\epsilon F} c^*(x),$$

$ii)$ kaikilla avoimilla joukoilla $G \subset \mathrm{R}$

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geq -inf_{v\epsilon G}\, c^*(x).$$

Todistus

Käsitellään ensin kohtaa $i)$ eli todistusta suljetun joukon tapauksessa.

Oletetaan, että joukko F on suljettu epätyhjä joukko. Nyt voidaan pitää triviaalina sitä, että kun $I_F = inf_{v\epsilon F} c^*(x) = 0$, pätee $\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{n} \log \mu_n(F) \leq -inf_{v\epsilon F} c^*(x)$.

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, jossa $I_F > 0$. Otetaan käyttöön merkinnät $\bar{x} = E[X_1]$ ja$\hat{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$.

Nyt kaikilla x ja $\lambda \geq 0$ saadaan Chebychevin epäyhtälöä[5] soveltaen:

$$\mu_n([x,\infty)) = E\left[1_{\hat{S}_n - x \geq 0}\right] \leq E\left[e^{n\lambda(\hat{S}_n - \mathrm{x})}\right].$$

Tästä saadaan käyttäen hyväksi eksponenttifunktion ominaisuuksia, sekä $\hat{S}_n : n$ määritelmää

$$\mu_n([x,\infty)) \leq E\left[e^{n\lambda\hat{S}_n - \mathbf{n\lambda x}}\right] = E\left[e^{n\lambda \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{X_j} - \mathbf{n\lambda x}}\right] = e^{-n\lambda x} \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{\lambda X_i}\right] = e^{-n[\lambda x - c(\lambda)]}.$$

[5] Käytetään hyväksi Chebychevin epäyhtälön sovellusmuotoa: $P(X \geq n) \leq e^{-nt} E(e^{Xt}), t > 0$

Nyt mikäli odotusarvo on ylhäältä rajattu, eli $\bar{x} < \infty$ saadaan konveksin konjugantin määritelmää hyödyntäen kaikilla $x > \bar{x}$

$$\mu_n([x,\infty)) \leq e^{-nc^*(x)}.$$

Vastaavasti alhaalta rajatulle odotusarvolle $\bar{x} > -\infty$ nähdään kaikilla $x < \bar{x}$

$$\mu_n((-\infty,x]) \leq e^{-nc^*(x)}.$$

Oletetaan nyt, että x on äärellinen. Nyt $c^*(\bar{x}) = 0$ ja, koska oletimme, että $I_F > 0$, on oltava niin, että $\bar{x}$ kuuluu suljetun joukon F komplementtiin F^c , joka on avoin joukko. Valitaan (x_-, x_+) niin, että se on yhdistelmä, joka sisältää kaikki avoimet välit $(a,b) \in F^c$ siten, että $\bar{x}$ kuuluu välille (a,b). Nyt $x_- < x_+$ ja jommankumman välin päätepiste x_- tai x_+ pitää olla äärellinen, sillä F on epätyhjä. Jos x_- on äärellinen, niin $x_- \in F$ ja vastaavasti $c^*(x_-) \geq I_F$. Samoin nähdään, että jos x_+ on äärellinen, niin myös $c^*(x_+) \geq I_F$. Käytetään seuraavaksi hyväksi tulosta $\mu_n([x,\infty)) \leq e^{-nc^*(x)}$ avoimen välin ylärajalle $x = x_+$ ja tulosta $\mu_n((-\infty,x]) \leq e^{-nc^*(x)}$ alarajalle $x = x_-$

$$\mu_n(F) \leq \mu_n\big((-\infty,x_-]\big) + \mu_n\big([x_+,\infty)\big) \leq 2e^{-nI_F}.$$

Tästä saadaan suoraan, että

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{n}\log \mu_n(F) \leq \frac{1}{n}\log e^{-nI_F} = \frac{1}{n}(-nI_F) = -inf_{x\epsilon F} c^*(x).$$

Oletetaan nyt, että $\bar{x} = -\infty$ (tapaus $\bar{x} = \infty$ toimii vastaavalla tavalla). Koska kumulantit generoiva funktio ei ole vähenevä saadaan $\lim_{n\to-\infty} c^*(x) = 0$ ja $x_+ = inf\{: x \in F\}$ on äärellinen, sillä muuten $I_F = 0$. Nyt siitä, että F on suljettu joukko seuraa, että $x_+ \in F$ ja $c^*(x_+) \geq I_F$. Nyt $F \subset [x_+,\infty)$, joten soveltamalla tulosta $\mu_n([x,\infty)) \leq e^{-nc^*(x)}$, kun $x = x_+$, saadaan $\mu_n(F) \leq e^{-nI_F}$, josta taas saadaan

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{n}\log \mu_n(F) \leq -inf_{x\epsilon F} c^*(x).$$

Tarkastellaan seuraavaksi lauseen osaa ii), jonka todistus on huomattavasti monimutkaisempi.

Tämän kohdan todistuksen keskiössä on epäyhtälö

1) $\lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n}\log \mu_n(-\delta,\delta) \geq inf_{\lambda\epsilon R} c(\lambda) = -c^*(0)$

niin, että $\delta > 0$ ja $\mu \in M_1(R)$. Tehdään muunnos $Y = X - x$, josta puolestaan saadaan

$c_Y(\lambda) = c(\lambda) - \lambda x = -\big(\lambda x - c(\lambda)\big)$, jonka avulla puolestaan nähdään, että $c_Y^*(\cdot) = c^*(\cdot + x)$.

Epäyhtälön 1) avulla nähdään nyt, että kaikilla x ja $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n}\log \mu_n\big((x-\delta, x+\delta)\big) \geq -c^*(x).$$

Nyt tutkittava joukko G on avoin. Tästä johtuen kaikilla $x \in G$ ja kaikilla $\delta > 0$, jossa δ on valittu tarpeeksi pieneksi niin, että väli $(x-\delta, x+\delta) \subset G$. Edellisen epäyhtälön avulla saadaan nyt

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n}\log \mu_n(G) \geq -inf_{x\epsilon G} c^*(x).$$

Todistuksen viimeistelemiseksi on kuitenkin vielä osoitettava epäyhtälön 1) pätevyys.

Aloitetaan tapauksesta, jossa $\mu\big((-\infty,0)\big) > 0,\ \mu(0,\infty) > 0$ ja μ on määritelty $R{:}n$ rajoitetussa aliavaruudessa. Nyt $c(\lambda) \to \infty$, sillä $|\lambda| \to \infty$ ja $c(\cdot)$ on äärellinen kaikkialla. $c(\cdot)$ on myös jatkuva ja differentioituva funktio, joten on olemassa äärellinen ƞ siten, että

$$c(\eta) = inf_{\lambda \epsilon R} c(\lambda), \qquad c'(\eta) = 0.$$

Määritellään seuraavaksi uusi todennäköisyysmitta $\tilde{\mu}$

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu}(x) = e^{nx - c(\eta)} = e^{nx} e^{-c(\eta)} = e^{nx} e^{-logM(\eta)}\,.$$

Aiemmissa luvuissa esitetyn nojalla voidaan nyt todeta, että $\tilde{\mu}$ on todennäköisyysmitta, sillä tutkittaessa integraalia ylitse tason R:

$$\int d\tilde{\mu} = \int e^{nx}\, e^{\log\left(M(\eta)\right)^{-1}} d\mu = \frac{1}{M(\eta)} \int e^{\eta x} d\mu = 1.$$

Nyt oletetaan, että $X_i{:}t$ ovat samoin jakautuneita riippumattomia satunnaismuuttujia, ja että $\varepsilon > 0$

$$\mu_n\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big) = \int\limits_{|\sum_{i=1}^{n} x_i| < n\varepsilon} \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n)$$

$$\geq e^{-n\varepsilon|n|} \int\limits_{|\sum_{i=1}^{n} x_i| < n\varepsilon} e^{\left(\eta \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n)}$$

$$= e^{-n\varepsilon|\eta|} e^{nc(\eta)} \tilde{\mu}_n\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big).$$

Aiemmin todistetun ja ƞ$:n$ määritelmän nojalla nähdään, että

$$E_{\tilde{\mu}}[X_1] = \frac{1}{M(\eta)} \int\limits_{R} x e^{\eta x}\, d\mu.$$

Aiemmissa luvuissa todetun perusteella voidaan nyt nähdä, että yllä esitetty on kumulantit generoivan funktion ensimmäinen derivaatta, eli

$$E_{\tilde{\mu}}[X_1] = \frac{1}{M(\eta)} \int\limits_{R} x e^{\eta x}\, d\mu = c'(\eta) = 0.$$

Suurten lukujen lain[6] perusteella voidaan nyt kirjoittaa

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big) = 1.$$

[6] Olkoon riippumattomien satunnaismuuttujien jono X_i siten että kaikilla on sama odotusarvo $E[X_i] = \mu$ ja varianssi σ^2. Tällöin keskiarvo $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ lähestyy odotusarvoa μ seuraavassa mielessä $P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu\right) = 1.$

Epäyhtälön $\mu_n\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big) \geq e^{-n\varepsilon|\eta|}e^{nc(\eta)}\tilde{\mu}_n\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big)$ sekä $0 < \varepsilon < \delta$, nojalla voidaan nyt kirjoittaa

$$\lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\log\mu_n(-\delta,\delta) \geq \lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\log\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big) \geq \lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\log e^{-n\varepsilon|\eta|}e^{nc(\eta)}\tilde{\mu}_n\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big).$$

Tästä saadaan

$$\lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\log\mu_n(-\delta,\delta) \geq \lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\Big(\big(-n\varepsilon|\eta| + nc(\eta)\big) + \log\tilde{\mu}_n\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big)\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} inf\left(-\varepsilon|\eta| + c(\eta) + \underbrace{\log\tilde{\mu}_n\big((-\varepsilon,\varepsilon)\big)}_{=1,kun\; n\to\infty}\right).$$

Nyt annetaan $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\log\mu_n(-\delta,\delta) \geq -\varepsilon|\eta| + c(\eta) = \underbrace{-\varepsilon|\eta|}_{\to 0,kun\;\varepsilon\to 0} + inf_{\lambda\epsilon R}c(\lambda).$$

Nyt nähdään, että epäyhtälö 1) toteutuu, sillä

$$\lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\log\mu_n(-\delta,\delta) \geq inf_{\lambda\epsilon R}c(\lambda) = -c^*(0).$$

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa $\mu\big((-\infty,0)\big) > 0$ ja $\mu\big((0,\infty)\big) > 0$, mutta itse μ on rajoittamaton. Kiinnitetään nyt tarpeeksi suuri M, joka toteuttaa $\mu\big([-M,0)\big) > 0$ ja $\mu\big((0,M]\big) > 0$ ja

$$c_M(\lambda) = \log\int_{-M}^{M} e^{\lambda x}d\mu.$$

Määritellään seuraavaksi kaksi apumuuttujaa. Olkoon $v = X_1$, ehdolla $\{|X_1| \leq M\}$ ja $v_n = \hat{S}_n$ ehdolla $\{|X_i| \leq M, i = 1,\cdots,n\}$. Nyt kaikilla n ja $\delta > 0$

$$\mu_n\big((-\delta,\delta)\big) \geq v_n\big((-\delta,\delta)\big)\mu([-M,M])^n.$$

Edellä todistetun perusteella nähdään, että epäyhtälö 1) toteutuu $v_n{:}\,llä$. Nyt voidaan määritellä $v_n{:}\,ään$ liittyvä kumulantit generoiva funktio $c_v = c_M(\lambda) - \log\mu_n([-M,M])$.

$$\lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\log\mu_n\big((-\delta,\delta)\big) \geq \lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\log v_n\big((-\delta,\delta)\big)\mu([-M,M])^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}\big(\log v_n\big((-\delta,\delta)\big) + \log\mu([-M,M])^n\big)$$

$$= \mu([-M,M]) + \lim_{n\to\infty} inf\,\frac{1}{n}v_n\big((-\delta,\delta)\big)$$

$$\geq inf_{\lambda\epsilon R}c_M(\lambda).$$

Viimeisimmän tuloksen perusteella tehdään merkinnät $I_M = -inf_{\lambda\epsilon R}c_M(\lambda)$ ja $I^* = \lim_{M\to\infty} sup\, I_M$, joiden perusteella voidaan kirjoittaa

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n} \log \mu_n\big((-\delta,\delta)\big) \geq -I^* = -\lim_{M\to\infty} sup\, I_M.$$

$c_M(\cdot)$ ei ole vähenevä, kuten ei myöskään $-I_M$. Tämän lisäksi $-I_M \leq c_M(0) \leq c(0) = 0$. Koska alaraja $-I_M$ on äärellinen, kun M on valittu riittävän suureksi, saadaan, että $-I^* > -\infty$. Nyt joukot $\{: \ c_M(\lambda) \leq -I^*\}$ ovat epätyhjiä ja niiden leikkauksesta löytyy ainakin yksi piste λ_0. Käyttämällä hyväksi Lebesguen monotonisen suppenemisen lausetta[7] saadaan

$$c(\lambda_0) = \lim_{M\to\infty} c_M(\lambda_0) \leq -I^*.$$

Yhdistämällä tämä aiemmin saatuun tulokseen

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n} \log \mu_n\big((-\delta,\delta)\big) \geq -I^* \geq \lim_{M\to\infty} c_M(\lambda_0) = c(\lambda_0) \geq inf_{\lambda\epsilon R} c(\lambda).$$

Lopuksi tarkastellaan tilannetta, jossa joko $\mu\big((-\infty,0)\big) = 0$ tai $\mu\big((0,\infty)\big) = 0$. Nyt $c(\cdot)$ on monotoninen funktio ja $inf_{\lambda\epsilon R} c(\lambda) = \log \mu(\{0\})$. Nyt epäyhtälö 1) saadaan

$$\mu_n\big((-\delta,\delta)\big) \geq \mu_n(\{0\}) = \mu_n(\{0\})^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n} \log \mu_n(-\delta,\delta) \geq \lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n} \log \mu_n(\{0\})^n = inf_{\lambda\epsilon R} c(\lambda).$$

Edellä esitetty Cramérin lause sai alkunsa 1938 luoden samalla perustan suurten poikkeamien teorialle. Määritelmän perusteella kuitenkin nähdään Cramérin lauseen rajoittuvan tapauksiin, joissa satunnaismuuttujat X_i ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Tärkeää kehitystä on nähty viime aikoina mm. Gärtnerin (1977) ja Ellisin (1984) toimesta, kun osoitettiin, että satunnaismuuttujaa X_i rajoittavasta riippumattomuus ja samoin jakautuneisuus oletuksista voidaan ainakin osittain luopua.

Esitetään seuraavaksi vertailun vuoksi Gärtner-Ellisin lauseena tunnettu tulos ilman tarkempaa katsausta lauseen todistukseen.

Määritelmä 18

Kaikilla $\lambda \,\epsilon\, R^d$ kumulantit generoiva funktio on olemassa reaaliarvoisena ja määritellään seuraavalla tavalla raja-arvona:

$$c(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} c_n(n\lambda).$$

Lisäksi ydin kuuluu joukon $D_c = \{\lambda \,\epsilon\, R^d : c(\lambda) < \infty\}$ sisäpisteisiin.

[7] Lebesguen monotoninen suppenemislause: Oletetaan avaruus (Ω, μ, x). Valitaan $f_1, f_2, \cdots$ ei väheneväksi jonoksi μ-mitallisia funktioita jotka saavat arvonsa joukosta $[0,\infty)$ siten, että kaikilla $k \geq 1$ ja kaikilla $\omega \,\epsilon\, \Omega$, $0 \leq f_k(\omega) \leq f_{k+1}(\omega)$ ja kaikilla Ω $f(\omega) := \lim_{k\to\infty} f_k(\omega)$. Nyt f on μ-mitallinen ja

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k dx = \int f dx$$

Erityisesti, jos μ_n rajoittaa riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien X_i keskiarvoa $\hat{S}_n$, niin kaikilla $n \epsilon Z_+$,

$$\frac{1}{n} c_n(n\lambda) = c(\lambda) = \log E\left[e^{\langle \lambda, X_1 \rangle}\right]$$

ja yllä esitetty määritelmä pätee aina, kun $0 \epsilon D_c^0$.

Lause 3 (Gärtner-Ellis)

i) Kaikilla suljetuilla joukoilla F

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{n} \log \mu_n(F) \leq -inf_{x \,\epsilon\, F} c^*(x).$$

ii) Kaikilla avoimilla joukoilla G

$$\lim_{n\to\infty} inf \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geq -\, inf_{x \,\epsilon\, G \,\cap\, E} c^*(x),$$

missä E on joukko avoimia[8] $c^*(x)$: n pisteitä, joiden muodostama avoin hypertaso[8] kuuluu joukkoon D_c^0

iii) Jos kumulantit generoiva funktio c on sileä[9] alhaalta puolijatkuva funktio, niin suurten poikkeamien teoria pätee hyvällä vauhtifunktiolla c^*.

[8] Pisteen $y \,\epsilon\, R^d$ sanotaan olevan avoin c^*:n piste, mikäli jollakin $\lambda \,\epsilon\, R^d$ ja kaikilla $x \neq y$,

$$\langle \lambda, y \rangle - c^*(y) > \langle \lambda, x \rangle - c^*(x),$$

Yllä esitetyssä määritelmässä muuttujaa λ kutsutaan avoimeksi hypertasoksi.

[9] Konveksi funktio : $R^d \to (-\infty, \infty]$ on sileä, jos

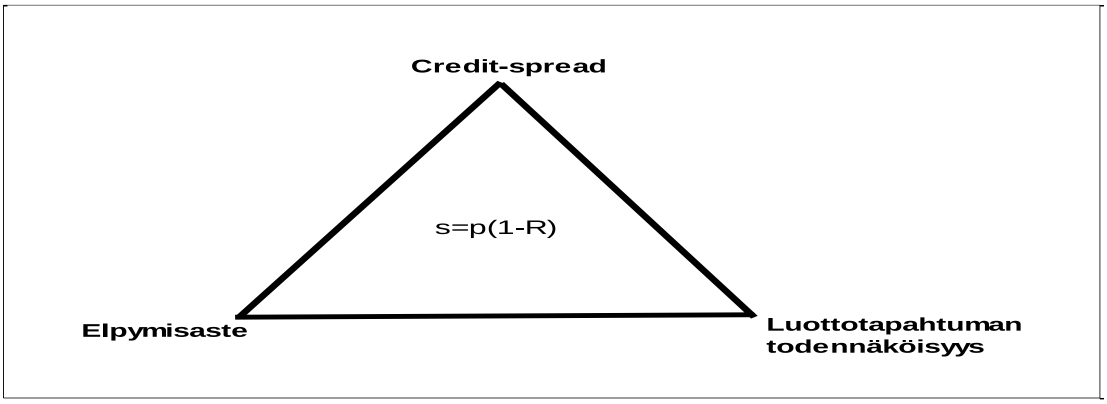
i) D_c^0 ei ole tyhjä

ii) $c(\cdot)$ on differentioituva koko joukossa D_c^0

iii) $c(\cdot)$ on jyrkkä, erityisesti $\lim_{n\to\infty} |\nabla c(\lambda_n)| = \infty$ aina kun $\{\lambda_n\}$ on kohti rajapistettä suppeneva sarja joukossa D_c^0.

Luottoriskianalyysistä

Luottoriskianalyysissä credit spread eli korkoero, jonka luottoriskillinen velkakirja tarjoaa riskittömänä pidettyyn valtionvelkakirjaan, on tärkeä käsite. Tämän korkoeron tulee kompensoida sijoittajaa luottoriskille altistumisesta. Hyvä esimerkki luottoriskillisestä sijoituskohteesta on jonkin yrityksen liikkeeseen laskema velkakirja. Yrityslainojen hinnat ilmaistaan usein korkopiste-eroina valtionlainoihin tai vastaavaan yleisesti määriteltyyn hinnoittelulähteeseen verrattuna. Luottokolmioksi kutsutaan suhdetta credit spreadin, luottotapahtuman todennäköisyyden ja elpymisasteen välillä.



Kuva 8 Luottokolmio

Tärkeä osa luottoriskianalyysiä ovat velkojille ja liikkeeseenlaskijoille tuotettavat julkiset luottoluokitukset, joiden tarkoituksena on tarjota sijoittajille arvio yhtiön maksukyvystä. Luottoluokittajien tarjoamien palvelujen ja julkisen luokituksen etuja ovat mm. riippumattomuus sekä metodologian yhdenmukaisuus. Lisäksi arviointeja tuottavilla yhtiöillä on pääsy yritysten yksityisempiin tietokantoihin. Useampia vuosia toiminnassa olleet laitokset toimivat myös tärkeänä datanlähteenä markkina-analyytikoille. Merkittävimpiä julkisia luottolukituksia tarjoavia laitoksia ovat Standard & Poor’s, Moody’s ja Fitch.

Investment Grade	AAA	Ensiluokkaisen hyvä maksukapasiteetti
	AA	Erinomainen maksukapasiteetti
	A	Hyvä maksukapasiteetti
	BBB	Välttävä maksukapasiteetti
High Yield	BB	Epävarmuutta, joka saattaa vaikuttaa maksukykyyn
	B	Vakavampaa epävarmuutta, joka saattaa vaikuttaa maksukykyyn tai johtaa maksuhäiriöön. Tällä hetkellä maksukykyinen.
	CCC	Heikkouksia, jotka saattavat johtaa maksuhäiriöön
	CC	Selviä heikkouksia, jotka saattavat johtaa maksuhäiriöön
	C	Vakavia heikkouksia, jotka saattavat johtaa maksuhäiriöön. Konkurssiin hakeutuminen
	Default	Maksuhäiriö

Kuva 9 Luottoluokitusten jakauma ja merkitys[10]

[10] Lähteenä on käytetty luottoluokittaja Stantard & Poorsia. Jokaisen luottoluokan sisällä tehdään vielä ero -/+ merkein.

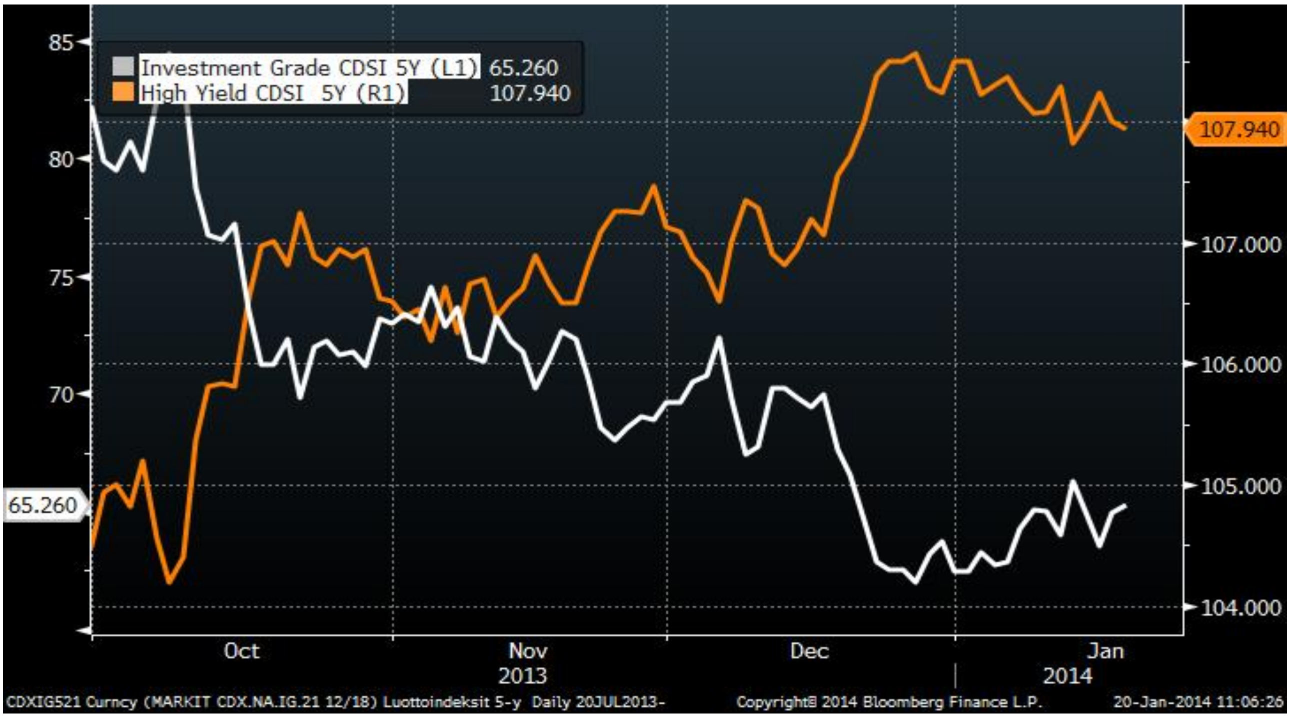
Julkiset luottoluokittajat keräävät tilastotietoa todennäköisyyksistä, joilla tiettyyn luokitusluokkaan vuonna n kuulunut velkakirja/liikkeeseenlaskija ajautuu maksuhäiriöihin. Velkakirjan elpymisasteella tarkoitetaan sitä prosenttiosuutta, jonka velkakirjan haltija voi odottaa saavansa takaisin luottotapahtuman sattuessa. Myös velkakirjojen elpymisasteita seurataan julkisten luottoluokittajien toimesta. Vertailueroja kerätään esimerkiksi velkakirjojen senioriteetin tai luottoluokituksen perusteella. Luottoluokittajat tuottavat myös siirtymämatriiseja, jotka taulukoivat todennäköisyyksiä, joilla velkakirja tai liikkeeseenlaskija siirtyy luokasta x luokkaan y vuoden aikana.

Alle investment grade -luokituksen (alle BBB) jääviä bondeja kutsutaan myös nimellä high yield -sijoitukset. High yield -bondien etuna on nimensä mukaisesti korkeampi tuottotaso, kun investment grade -bondeilla (luottoluokitukset AAA-BBB-), mutta vastaavasti saatavasta lisätuotosta joudutaan maksamaan myös suuremmalla riskillä. Ero investment grade ja high yield - velkakirjojen luottotapahtumaluvuissa on merkittävä. High yield -liikkeeseenlaskijoilla on usein korkeampi velkaisuusaste kuin investment grade -puolella operoivilla. Lisäksi sijoittajan on syytä kiinnittää erityistä huomiota velkomisjärjestykseen sekä erityisiin sopimusehtoihin. Rasittuneeksi velaksi (stressed debt) kutsutaan velkaa, jonka luottoluokitusta on jouduttu leikkaamaan liikkeeseenlaskijan kohtaamien ongelmien vuoksi. Rasittunut velka voi kehittyä hädänalaiseksi (distressed debt), mikäli yhtiön tilanne heikkenee ja sen likviditeetti kuivuu markkinoillepääsyn estymisen takia.

Velkakirjamarkkinoilla eroja omistajan oikeuksiin tehdään myös erilaisten velkomisjärjestelyjen avulla. Puhuttaessa velkakirjan senioriteetistä tarkoitetaan sitä, missä asemassa velkakirjan omistaja on luottotapahtuman sattuessa. Esimerkkinä velkakirjojen jaottelusta velkomissenioriteetin mukaan: $senior\ secured, senior\ unsecured, senior\ subordinated$ ja $junior\ subordinated$. Toinen tapa muodostaa velkomisjärjestys on erilaisten yritysrakenteiden kautta. Esimerkiksi yrityksen operoivan puolen velkakirjat voivat olla holding-puolen velkakirjoihin nähden etulyöntiasemassa velkojan näkökulmasta.

CDS eli credit default swap on luottoriskijohdannainen, joka on kehitetty suojaamaan sijoittajia luottoriskillisten sijoituskohteiden mahdollisilta riskeiltä. Luottoriskillisen sijoituskohteen omistaja on altistunut luottoriskille. Suojautuakseen mahdollisilta luottotapahtumilta sijoittaja voi ostaa CDS-sopimuksen. Tällä tarkoitetaan tilannetta, jossa velkakirjan omistaja maksaa vastapuolelle preemioita, kun taas vastapuoli sitoutuu korvaamaan mahdollisesta luottoriskitapahtumasta (luottoriskitapahtuma määritellään tarkemmin CDS-sopimuksessa) aiheutuvat menetykset sijoittajalle.

Kuviossa 10 esitetään luottojohdannaisindeksien korkoerokehitystä valtionlainoja vastaan. Valkoisella esitetään 5-vuotinen CDS Investment grade indeksi (vasen akseli). Indeksi on muodostettu 125 eri Yhdysvaltalaisen yrityksen CDS-tasojen perusteella. Jokaisen indeksissä olevan nimen paino on sama. Oranssilla esitetään 5-vuotinen CDS High Yield indeksi (oikea akseli), joka on koostettu käyttäen 100 eri yhdysvaltalaisen yrityksen CDS-tasoja. Molemmat indeksit rollataan kuuden kuukauden välein (maaliskuu ja syyskuu). Kuvan perusteella nähdään siis, että investmen grade -luokan spread-kehitys on ollut myönteistä ja ero valtionlainoihin on kaventunut tarkasteluperiodilla. High yield -luokan tilanne on päinvastainen. Korkoero valtionlainoihin on kasvanut.



Kuva 10 5-vuotiset CDS tasot[11]

Edellisissä luvuissa esitettyä teoriaa voidaan nyt käyttää hyväksi luottoriskillisten sijoituskohteiden arvioinnissa. Tyypillinen tapa hyödyntää suurten poikkeaminen teoriaa portfolioanalyysissä on arvioida yksittäisten positioiden aiheuttamaa menetystä sekä menetysten kokoluokan jakaumaa silloin, kun luottotapahtuma realisoituu. Tätä informaatiota voidaan käyttää hyödyksi esimerkiksi allokaatiojakoa eri sijoitusluokkien tai tuotteiden välillä pohdittaessa. Suurten portfolio-tappioiden kannalta myös tapahtumaperiodilla on merkitystä. Positioiden aiheuttamat suuret tappiot ovat sijoittajalle sitä vakavampia, mitä lyhyemmän ajan sisällä ne tapahtuvat. Suuret ja yllättäen kohdatut tappiot voivat aiheuttaa vakavan käteisvajeen ja pakottaa sijoittajan tekemään epäsuotuisia ja huonosti harkittuja ratkaisuja.

Esimerkki 8

Oletetaan pankki, joka lainaa rahaa kahden tyyppisille sijoittajille. Ensimmäinen lainaaja on hyvän luottoluokituksen omaava yritys, jolle pankki on allokoinut suuremman limiitin. Nämä lainaajat aiheuttavat pankille suurempia tappioita, mutta pienemmällä todennäköisyydellä. Toinen lainaaja on huonomman luottoluokituksen omaava yritys. Pankin sallittu maksimi lainauslimiitti tälle yritykselle on pienempi ja näin ollen aiheutuneet tappiot ovat myös pienempiä, mutta niitä tapahtuu suuremmalla todennäköisyydellä. Varautuakseen äärimmäisiin stressiolosuhteisiin pankki valitsee optimaalisen painon myöntämiensä lainojen suuruudelle.

Oletetaan todennäköisyysavaruus (Ω, A, P). Ajatellaan seuraavaksi sijoitussalkkua, jossa on äärellinen määrä n positioita. Otetaan käyttöön diskreetti muuttuja Z_i joka saa arvot $0 = ei\ tappiota$ ja $1 = tappio$. Merkinnällä $U_i \geq 0$ tarkoitetaan position i aiheuttamaa altistumaa tappion sattuessa (eli sitä kuinka paljon

[11] Lähde Bloomberg

rahaa menetetään). Eli tarkastellessa portfoliota, jossa positio i on aiheuttanut tappion $\{Z_i = 1\}$, on odotettavissa oleva tappio siis $Z_i U_i$. Koko sijoitussalkun tappio saadaan siis kaavalla

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i U_i.$$

Kiinnostuksen kohteena on selvittää todennäköisyyttä $P(L_n \geq nx)$ eli todennäköisyyttä sille, että portfolion kokonaistappio ylittää tietyn rajatason. Lisäksi tutkitaan satunnaismuuttujien U_i ja Z_i jakaumia ehdolla $L_n \geq nx$. Näiden avulla voidaan muodostaa portfolio siten, että jokaisen tyypin α sijoituksesta saadaan paras mahdollinen tuotto-riski suhde esiin.

Tappiotodennäköisyyksien arviointiin voidaan tuoda mukaan myös ehdollinen puoli. Oletetaan diskreetti satunnaismuuttuja Y siten, että satunnaismuuttujat U_i ja Z_i, $(i = 1, \cdots, n)$ ovat kaikki riippumattomia ehdolla Y. Satunnaismuuttujalla Y voidaan tarkasteluun tuoda mukaan jokin makro-ekonomistinen katsontatapa. Esimerkiksi yritysriskiä arvioitaessa Y voi kuvata kansantalouden tilaa (nousu-, laskukausi) tai velkakirjan teollisuussektoria. Mitä tarkemmin jaoteltua dataa on saatavilla, sitä paremmin päästään pureutumaan velkakirjojen analyysiin käyttäen hyväksi eri tapoja valita Y.

Oletetaan, että nämä positiot n jakautuvat eri tyyppeihin (esimerkiksi luottoluokituksen mukaan) niin, että tyyppiin α on sijoitettu suhteellinen osuus q_α. Oletetaan siis, että tyyppiin α sijoitetun osuuden kaikilla positioilla i on sama jakauma. Merkinnällä $\delta_\alpha(Y) = P(Z_\alpha = 1|Y)$ tarkoitetaan sitä tyyppiin α kohdistuvan tappion todennäköisyyttä, joka realisoituu, kun tapahtuma Y tapahtuu.

Numeerinen esimerkki

Oletetaan, että kansantaloudella on neljä eri tilaa $nousu, huippu, lasku\ ja\ lama$. Merkitään näitä tiloja edellisessä luvussa esitetyllä tavalla $(Y = y_i)$ ja $i = 1 \cdots 4$. Asetetaan näiden tilojen todennäköisyydet määrittämällä $P(Y = y_i) = p_i$. Tässä tietysti $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$.

Oletetaan seuraavaksi sijoittaja, jolla on käytössään kaksi eri sijoitusluokkaa $(\alpha = 1{,}2)$ investment grade ja hight yield. Oletetaan lisäksi, että sijoitussalkun jakautuminen näiden luokkien välillä määräytyy prosenttiosuuksin, eikä positioiden lukumäärän perusteella. Investment grade -luokkaan sijoitetaan osuus q_1 ja high yield -luokkaan vastaavasti $q_2 = 1 - q_1$. Positioita on yhteensä määrä n.

Yhdistämällä talouden suhdannevaihtelut, sekä sijoitusluokat voidaan nyt määritellä ehdolliset tappiotodennäköisyydet $\delta_\alpha = (Z_\alpha = 1|Y = y_i)$ käyttäen hyväksi edellisen luvun merkintöjä. Lyhennetään merkintäketjua niin, että $\delta_\alpha = (y_i)$ tarkoittaa sitä, että taloudentilassa y_i positio α tuottaa tappion

1. Nousu	2. Huippu	3. Lasku	4. Lama
$\delta_1(y_1) = a_1$	$\delta_1(y_2) = a_2$	$\delta_1(y_3) = a_3$	$\delta_1(y_4) = a_4$
$\delta_2(y_1) = b_1$	$\delta_2(y_2) = b_2$	$\delta_2(y_3) = b_3$	$\delta_2(y_4) = b_4$

Oletetaan, että aiheutuvat tappiot sillä ehdolla että luottotapahtuma tapahtuu, ovat eksponentiaalisesti jakautuneita $U_\alpha \sim Exp(\lambda_\alpha)$. Merkitään $E(U_1) = u_1$ ja $E(U_2) = u_2$. Eksponenttijakauma $Exp(\lambda) = Gamma(1, \lambda)$, joten eksponentiaalisesti jakautuneen satunnaismuuttujan momentit generoivan funktion laskemiseen voidaan käyttää hyväksi esimerkkiä 1.

$$M_\alpha(s) = \left(\frac{1}{1 - \frac{s}{\alpha}}\right)^r = \frac{1}{1 - \frac{s}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda - s}.$$

Suurten poikkeamien teoriaan käsiksi pääsemiseen tarvitaan vielä kumulantit generoiva funktio $c(s|Y)$ sekä Legendre-Fenchel-muunnos $c^*(x|Y)$.

$$c(s|Y) = \frac{1}{n}\log E(e^{snL_n}|Y) = \sum_\alpha q_\alpha \log\big(1 - \delta_\alpha(Y) + \delta_\alpha(Y)M_\alpha(s)\big),$$

kun $s < \min \lambda_\alpha$.

$$c^*(x|Y) = sup_{s\geq 0}\{sx - c(s|Y)\} = sup_{s\geq 0}\left\{sx - \sum_\alpha q_\alpha \log\big(1 - \delta_\alpha(Y) + \delta_\alpha(Y)M_\alpha(s)\big)\right\}.$$

Legendre-Fenchel-transformaation laskemiseksi otetaan käyttöön apufunktio

$$g(s) = sx - c(s|Y) = \sum_\alpha q_\alpha \log\big(1 - \delta_\alpha(Y) + \delta_\alpha(Y)M_\alpha(s)\big).$$

Selvittämällä funktion $g(s)$ derivaatan nollakohdat päästään käsiksi supremiumin määrittelemiseen.

$$g'(s) = x - c'(s|Y) \rightarrow x = c'(s|Y).$$

Ratkaisemalla tästä yhtälöstä s ja sijoittamalla se yhtälöön $c^*(x|Y)$ saadaan muodostettua Legendre-Fenchel-muunnos. Tässä käsiteltävä esimerkki johtaa kuitenkin monimutkaiseen tilanteeseen, joten selvitetään tässä suhde, jolla s ja x riippuvat toisistaan, ja käytetään tulosten tuottamiseen tietokoneohjelmaa.

Edellisestä yhtälöstä saadaan ratkaistua s, kun $x_-(Y) < x < x_+(Y)$, jossa

$$x_-(Y) = c^*(0|Y) = \frac{1}{n}E(L_n|Y) = \sum_\alpha q_\alpha \delta_\alpha(Y)E(U_\alpha) = \sum_\alpha q_\alpha \delta_\alpha(Y)u_\alpha.$$

$$x_+(Y) = \sum_{\{\alpha:\, \delta_\alpha > 0\}} q_\alpha ess\sup\{U_\alpha\} = \infty.$$

Merkinnällä $x_-(Y)$ tarkoitetaan tässä siis keskimääräistä tappiota, kun taas merkintä $x_+(Y)$ viittaa keskimääräisten tappioiden maksimiin (tässä yläraja on ∞ johtuen oletuksesta että tappiot olivat eksponentiaalisesti jakautuneita).

Tappioille voidaan nyt muodostaa suurten poikkeamien teorian mukainen arvio

$$P(L_n > xn|Y) = \left(2\pi n s^2 c''(s|Y)\right)^{-1/2} e^{-nc^*(s|Y)},$$

kun $x_-(Y) < x < x_+(Y)$.

1. Nousukausi, eli $Y = y_1$

$$c(s|y_1) = q_1 \log\left(1 - a_1 + a_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right) + (1 - q_1)\log\left(1 - b_1 + b_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right).$$

$$c''(s|Y) = \frac{2q_1 a_1 \lambda_1}{\left(1 - a_1 + a_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)(\lambda_1 - s)^3} - \frac{q_1 a_1^2 \lambda_1^2}{(\lambda_1 - s)^4 \left(1 - a_1 + a_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)^2} + \frac{2(1 - q_1) b_1 \lambda_2}{\left(1 - b_1 + b_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)(\lambda_2 - s)^3} - \frac{(1 - q_1) b_1^2 \lambda_2^2}{(\lambda_2 - s)^4 \left(1 - b_1 + b_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)^2}.$$

$$x = \frac{q_1 \lambda_1 a_1}{\left(1 - a_1 + a_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)(\lambda_1 - s)^2} + \frac{(1 - q_1)(\lambda_2 b_1)}{\left(1 - b_1 + b_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)(\lambda_2 - s)^2}.$$

$$x_-(Y) = q_1 a_1 u_1 + (1 - q_1) b_1 u_2, \qquad x_+(Y) = \infty\,.$$

2. Huippukausi, eli $Y = y_2$

$$c(s|y_2) = q_1 \log\left(1 - a_2 + a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right) + (1 - q_1)\log\left(1 - b_2 + b_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right).$$

$$c''(s|Y) = \frac{2q_1 a_2 \lambda_1}{\left(1 - a_2 + a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)(\lambda_1 - s)^3} - \frac{q_1 a_2^2 \lambda_1^2}{(\lambda_1 - s)^4 \left(1 - a_2 + a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)^2}$$
$$+ \frac{2(1 - q_1) b_2 \lambda_2}{\left(1 - b_2 + b_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)(\lambda_2 - s)^3} - \frac{(1 - q_1) b_1^2 \lambda_2^2}{(\lambda_2 - s)^4 \left(1 - b_2 + b_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)^2}.$$

$$x = \frac{q_1 \lambda_1 a_2}{\left(1 - a_2 + a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)(\lambda_1 - s)^2} + \frac{(1 - q_1)(\lambda_2 b_2)}{\left(1 - b_2 + b_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)(\lambda_2 - s)^2}.$$

$$x_-(Y) = q_1 a_2 u_1 + (1 - q_1) b_2 u_2, \qquad x_+(Y) = \infty.$$

3. Laskukausi, eli $Y = y_3$

$$c(s|y_3) = q_1 \log\left(1 - a_3 + a_3 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right) + (1 - q_1) \log\left(1 - b_3 + b_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right).$$

$$c''(s|Y) = \frac{2q_1 a_3 \lambda_1}{\left(1 - a_1 + a_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)(\lambda_1 - s)^3} - \frac{q_1 a_3^2 \lambda_1^2}{(\lambda_1 - s)^4 \left(1 - a_1 + a_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)^2}$$
$$+ \frac{2(1 - q_1) b_3 \lambda_2}{\left(1 - b_3 + b_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)(\lambda_2 - s)^3} - \frac{(1 - q_1) b_1^2 \lambda_2^2}{(\lambda_2 - s)^4 \left(1 - b_3 + b_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)^2}.$$

$$x = \frac{q_1 \lambda_1 a_3}{\left(1 - a_3 + a_3 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)(\lambda_1 - s)^2} + \frac{(1 - q_1)(\lambda_2 b_3)}{\left(1 - b_3 + b_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)(\lambda_2 - s)^2}.$$

$$x_-(Y) = q_1 a_3 u_1 + (1 - q_1) b_3 u_2, \qquad x_+(Y) = \infty.$$

4. Lamakausi, eli $Y = y_4$

$$c(s|y_4) = q_1 \log\left(1 - a_4 + a_4 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right) + (1 - q_1) \log\left(1 - b_4 + b_4 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right).$$

$$c''(s|Y) = \frac{2q_1 a_4 \lambda_1}{\left(1 - a_4 + a_4 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)(\lambda_1 - s)^3} - \frac{q_1 a_4^2 \lambda_1^2}{(\lambda_1 - s)^4 \left(1 - a_4 + a_4 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)^2}$$
$$+ \frac{2(1 - q_1) b_4 \lambda_2}{\left(1 - b_4 + b_4 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)(\lambda_2 - s)^3} - \frac{(1 - q_1) b_4^2 \lambda_2^2}{(\lambda_2 - s)^4 \left(1 - b_4 + b_4 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)^2}.$$

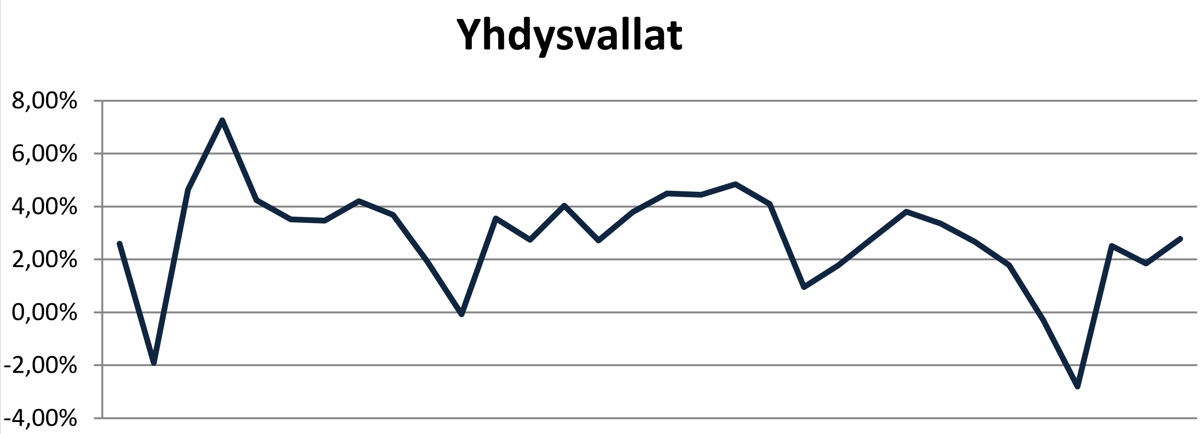
$$x = \frac{q_1 \lambda_1 a_4}{\left(1 - a_4 + a_4 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s}\right)(\lambda_1 - s)^2} + \frac{(1 - q_1)(\lambda_2 b_4)}{\left(1 - b_4 + b_4 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right)(\lambda_2 - s)^2}.$$

$$x_-(Y) = q_1 a_4 u_1 + (1 - q_1) b_4 u_2, x_+(Y) = \infty.$$

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkitapauksia niin, että datat on jaoteltu koskemaan Yhdysvaltojen ja Euroopan talousalueita.

Yhdysvallat

Yhdysvaltojen ja Euroopan talouskehitykset ovat kautta aikojen olleen tiukasti sidoksissa toisiinsa. Kuitenkin tarkasteltaessa talouden indikaattoreiden kehitystä vuositasolla paljastuu talousalueiden rakenteellisista eroista johtuvia poikkeamia kasvuvauhdeissa. Laskelmia varten on muodostettu arviot Yhdysvaltojen talouskehityksestä käyttäen hyväksi bruttokansantuotteen vuotuisia kasvulukuja. Perustuen bruttokansantuotteen kasvutasoon, on havainnot jaettu neljään kategoriaan $nousu, huippu, lasku\ ja\ lama$ riippuen siitä, mihin neljännekseen ne kuuluvat tarkasteluperiodilla. Havainnot on mitattu vuosilta 1981–2012, ja ne ovat peräisin World Bankin tietokannasta.



Kuva 11 Yhdysvaltojen BKT:n vuotuinen kehitys

Sijoitusten odotettavissa olevat konkurssitodennäköisyydet on muodostettu käyttäen luottoluokittaja S&P:n tietokantaa. Näistä on edelleen johdettu taloustilanteelle ehdolliset todennäköisyydet (eli tappiotodennäköisyydet, kun oletuksena on konkurssi) käyttäen hyväksi World Bankin tietokantaa talousindikaattoreista. Yhdistämällä S&P:n ja World Bankin datat, on laskelmia varten muodostettu seuraavat taloustilanteelle ehdolliset konkurssitodennäköisyydet:

1. Nousu	2. Huippu	3. Lasku	4. Lama
$\delta_1(y_1) = 0{,}0006$	$\delta_1(y_2) = 0{,}0012$	$\delta_1(y_3) = 0{,}0003$	$\delta_1(y_4) = 0{,}0030$
$\delta_2(y_1) = 0{,}0345$	$\delta_2(y_2) = 0{,}0408$	$\delta_2(y_3) = 0{,}0342$	$\delta_2(y_4) = 0{,}0644$

Tappioiden odotusarvojen muodostamisessa on käytetty luottoluokittaja Moody’sin datatietokannan perusteella tehtyjä arvioita. Tietokannan mukaan investment grade -luokkaan sijoittava voi olettaa tappion sattuessa saavansa takaisin noin 40 % sijoituksensa alkuperäisestä arvosta. High Yield -luokan kohdalla vastaava lukema on noin 35 %. Oletetaan siis, että aiheutuvat tappiot sillä ehdolla että luottotapahtuma tapahtuu, ovat eksponentiaalisesti jakautuneita $U_\alpha \sim Exp(\lambda_\alpha)$, ja että $E(U_1) = 600\ \left(\lambda_1 = \frac{1}{600}\right)$ ja $E(U_2) =$

650 $\left(\lambda_2 = \frac{1}{650}\right)$. Esimerkiksi sijoitettaessa 1 miljoona molempiin luokkiin (ja oletettaessa, että sijoituskohde ajautuu konkurssiin molemmissa tapauksissa), on investment grade -luokan odotettavissa oleva keskimääräinen tappio 600 000 suuruusluokkaa kun taas high yield -luokan 650 000.

Oletetaan konservatiivinen sijoittaja, joka muodostaa salkun niin, että investment grade -luokan osuus on 80 % ja high yield -luokan osuus 20 %. Muodostetaan seuraavaksi eri talouden tilanteille yllä esitetyt vaihteluvälit. Suurten poikkeamien approksimaatioiden laskemiseen on käytettävä hyväksi tietokonetta.

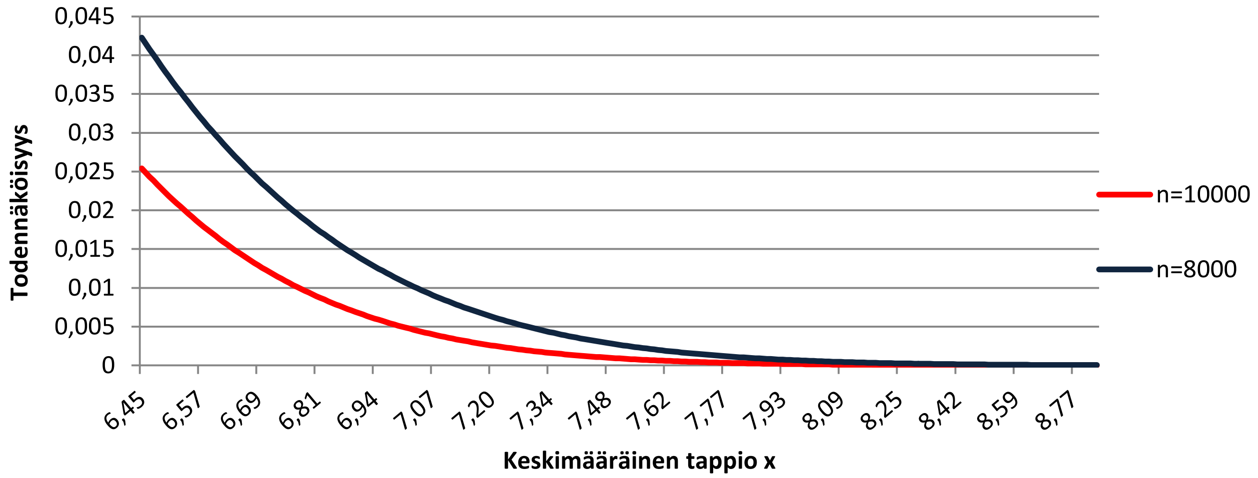
1. Nousukausi, eli $Y = y_1$: $x_-(Y) = 4{,}77 < x < x_+(Y) = \infty$

2. Huippukausi, eli $Y = y_2$: $x_-(Y) = 5{,}88 < x < x_+(Y) = \infty$

3. Laskukausi, eli $Y = y_3$: $x_-(Y) = 4{,}59 < x < x_+(Y) = \infty$

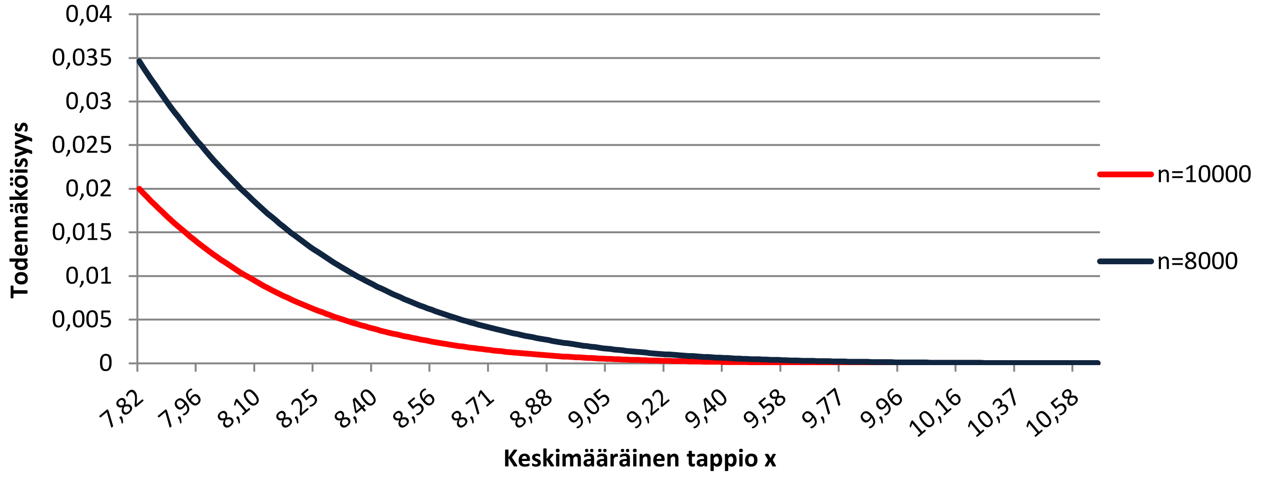
4. Lamakausi, eli $Y = y_4$: $x_-(Y) = 9{,}81 < x < x_+(Y) = \infty$

Verrattaessa keskimääräisiä tappioita $x_-(Y)$ eri talouden tilanteissa, nähdään että alhaisin keskimääräinen tappio muodostuu laskukaudella, kun taas suurin liittyy lamakauteen. Tarkastellessa tiloja 1-3 huomataan keskimääräisten tappioiden olevan melko lähellä toisiaan, kun taas lamakauteen liittyvä keskimääräinen tappio on selvästi suurempi.



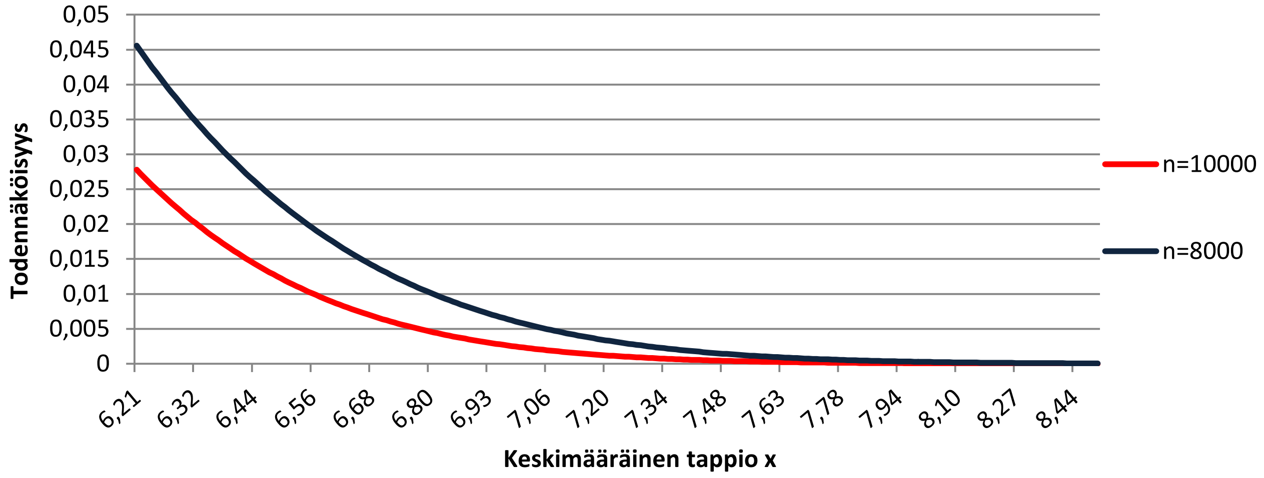
Kuva 12 Yhdysvallat, nousukausi

Yhdysvaltojen nousukaudet koettiin tarkasteluperiodilla 1980-luvun jälkimmäisellä puoliskolla, sekä 1990- ja 2000-lukujen keskivaiheilla. Nousukaudella konkurssitodennäköisyydet olivat hiukan korkeammat kuin laskukaudella, mutta matalammat kuin huippukaudella. Tarkasteltaessa suurempaa salkkua saavutetaan keskimääräinen tappio $x = 6{,}77$ per positio noin 1 % todennäköisyydellä ja tappio $x = 7{,}48$ noin 0,1 % todennäköisyydellä. Pienemmän salkun kohdalla vastaavat luvut ovat $x = 7{,}03$ ja $x = 7{,}83$.



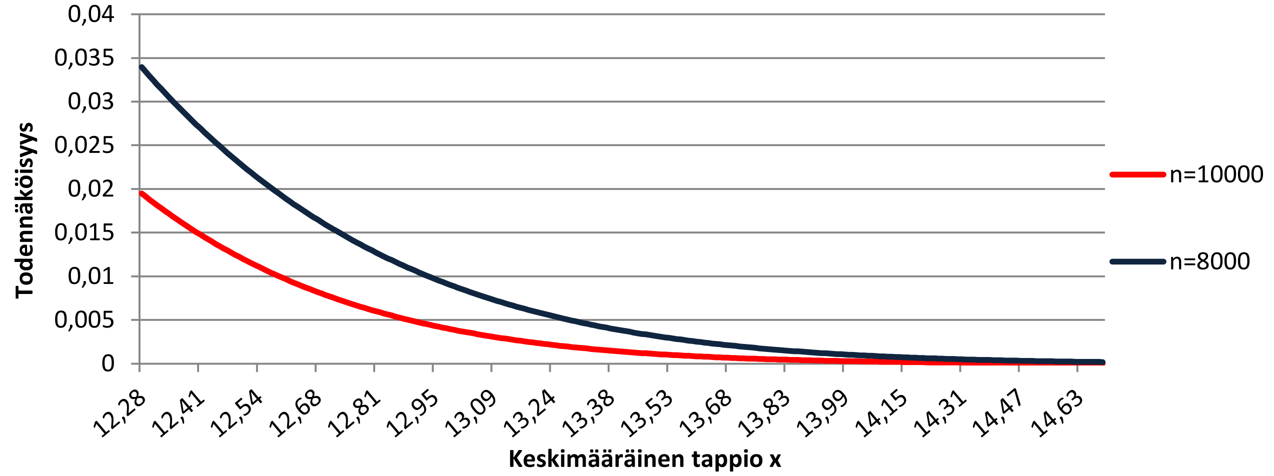
Kuva 13 Yhdysvallat, huippukausi

Tarkasteluperiodilla Yhdysvaltojen huippuvuodet koettiin 1980-luvun keskivaiheilla ja 1990-luvun lopussa. Konkurssitodennäköisyydet olivat molempien sijoitusluokkien kohdalla korkeammat kuin nousu- ja laskukaudella. Tarkasteltaessa suurempaa salkkua saavutetaan keskimääräinen tappio $x = 8{,}08$ per positio noin 1 % todennäköisyydellä ja tappio $x = 8{,}84$ noin 0,1 % todennäköisyydellä. Pienemmän salkun kohdalla vastaavat luvut ovat $x = 8{,}36$ ja $x = 9{,}23$.



Kuva 14 Yhdysvallat, laskukausi

Yhdysvaltojen laskukaudet ovat hajaantuneet tarkasteltavalle aikajaksolle muita tiloja epäyhtenäisemmin. Molempien sijoitusluokkien konkurssitodennäköisyyslukemat olivat tarkasteluperiodin alhaisimmat. High yield -luokan kohdalla ero ei ole niin merkittävä, mutta investment grade -luokan kohdalla suhteet nousu-, huippu- ja laskukauden lukemien välillä ovat erityisen kiinnostavat. Yhtenä selittäjänä ilmiölle voisi olla liikkeeseenlaskuaktiivisuus. Parempikuntoiset yhtiöt ovat asemassa, jossa voivat valita talousolosuhteet, joissa liikkeeseenlasku on yhtiölle mahdollisimman suotuisa. Heikommassa asemassa olevien yhtiöiden kohdalla rahoituksen tarve saattaa olla jatkuvampaa, ja yhtiö voi olla pakotettu tulemaan markkinoille hakemaan rahoitusta myös huonompien olosuhteiden vallitessa. Tarkasteltaessa suurempaa salkkua saavutetaan keskimääräinen tappio $x = 6{,}56$ per positio noin 1 % todennäköisyydellä ja tappio $x = 7{,}25$ noin 0,1 % todennäköisyydellä. Pienemmän salkun kohdalla vastaavat luvut ovat $x = 6{,}81$ ja $x = 7{,}60$.

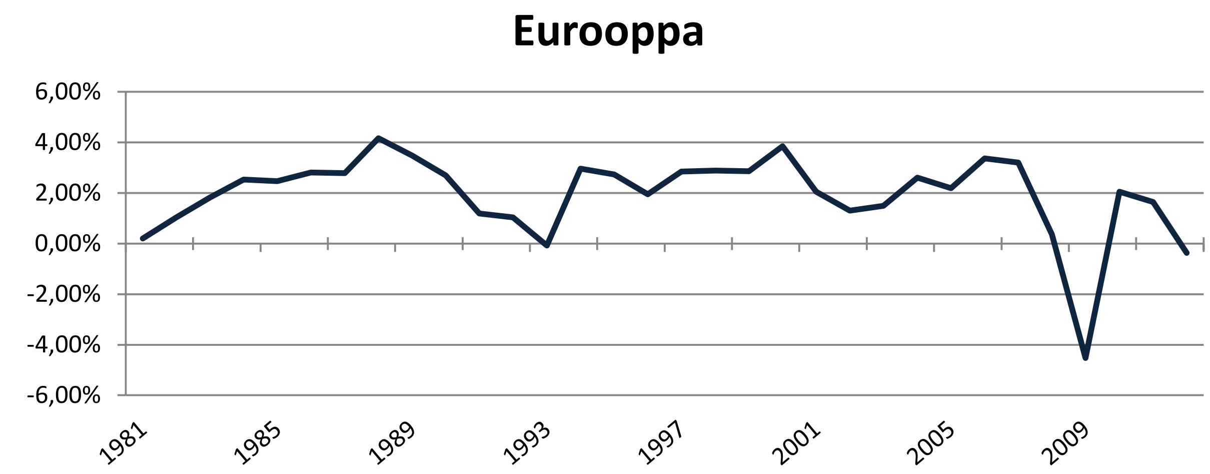


Kuva 15 Yhdysvallat, lamakausi

Pahimmat notkahdukset Yhdysvaltojen BKT:n kehityksessä on tarkasteluperiodin aikana koettu 1980- ja 1990-lukujen alussa, sekä 2000-luvulla. Omaksi huipukseen erottuu vuosi 2009, jolloin BKT:n negatiivisen kehityksen lisäksi myös konkurssitodennäköisyydet olivat suuria. Tarkasteltaessa lamakauden konkurssitodennäköisyystasoja huomataan, että erityisesti investment grade – luokan kohdalla ero muiden taloustilojen tilanteeseen on merkittävä. Myös high yield –sijoitusten konkurssitodennäköisyys kasvaa lamakaudella, mutta sen merkitys ei nouse moninkertaiseksi verrattuna toisiin taloudentilanteisiin. Tarkasteltaessa suurempaa salkkua saavutetaan keskimääräinen tappio $x = 12{,}59$ per positio noin 1 % todennäköisyydellä ja tappio $x = 13{,}54$ noin 0,1 % todennäköisyydellä. Pienemmän salkun kohdalla vastaavat luvut ovat $x = 12{,}93$ ja $x = 14{,}01$.

Eurooppa

Euroopan talouskehityksen arvioimiseen on myös käytetty World Bankin tarjoamaa tietokantaa bruttokansantuotteesta. Alueen kehityksen arvioimiseen on tässä käytetty Euroopan Unionille laskettua keskimääräistä bruttokansantuotetta. Tämän ulkopuolelle jäävät esimerkiksi sellaiset valtiot kuin Norja ja Sveitsi, mutta EU:n aggregaatin katsotaan olevan tässä kuitenkin riittävästi Euroopan keskimääräistä talouskasvua kuvaava. Toinen vaihtoehto olisi ollut käyttää euroalueelle muodostettua keskiarvoa, mutta se olisi jättänyt tarkastelun ulkopuolelle vielä enemmän maita. Erityisesti viime vuosina nähdyn euroalueen kriisin takia monien Itä-Euroopan maiden (jotka eivät kuulu euroon, mutta Euroopan Unioniin) merkitys bondien liikkeeseenlaskijana on korostunut, joten on aiempaa tärkeämpää, että myös ne ovat mukana tarkasteltavien maiden talousluvuissa.



Kuva 16 Euroopan BKT:n vuotuinen kehitys

Myös Euroopan kohdalla sijoitusten odotettavissa olevat konkurssitodennäköisyydet on muodostettu käyttäen luottoluokittaja S&P:n tietokantaa. Näistä on muodostettu seuraavat ehdolliset konkurssitodennäköisyydet käyttäen hyväksi World Bankin talousdataa:

1. Nousu	2. Huippu	3. Lasku	4. Lama
$\delta_1(y_1) = 0{,}0000$	$\delta_1(y_2) = 0{,}0002$	$\delta_1(y_3) = 0{,}0007$	$\delta_1(y_4) = 0{,}0003$
$\delta_2(y_1) = 0{,}0134$	$\delta_2(y_2) = 0{,}0135$	$\delta_2(y_3) = 0{,}0349$	$\delta_2(y_4) = 0{,}1239$

Oletetaan myös Euroopan kohdalla, että aiheutuvat tappiot sillä ehdolla, että luottotapahtuma tapahtuu, ovat eksponentiaalisesti jakautuneita $U_\alpha \sim Exp(\lambda_\alpha)$, ja että $E(U_1) = 600$ $\left(\lambda_1 = \frac{1}{600}\right)$ ja $E(U_2) = 650$ $\left(\lambda_2 = \frac{1}{650}\right)$. Pidetään samana myös oletus konservatiivisesta sijoittajasta, eli investment grade -luokan osuus on 80 % ja high yield -luokan 20 %.

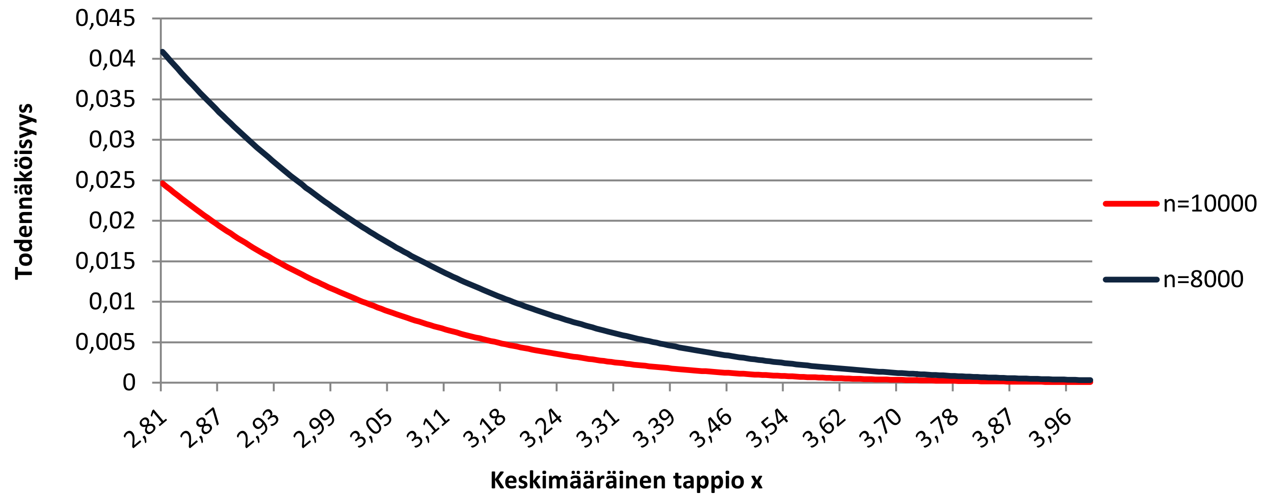
1. Nousukausi, eli $Y = y_1$: $x_-(Y) = 1{,}74 < x < x_+(Y) = \infty$

2. Huippukausi, eli $Y = y_2$: $x_-(Y) = 1{,}85 < x < x_+(Y) = \infty$

3. Laskukausi, eli $Y = y_3$: $x_-(Y) = 4{,}87 < x < x_+(Y) = \infty$

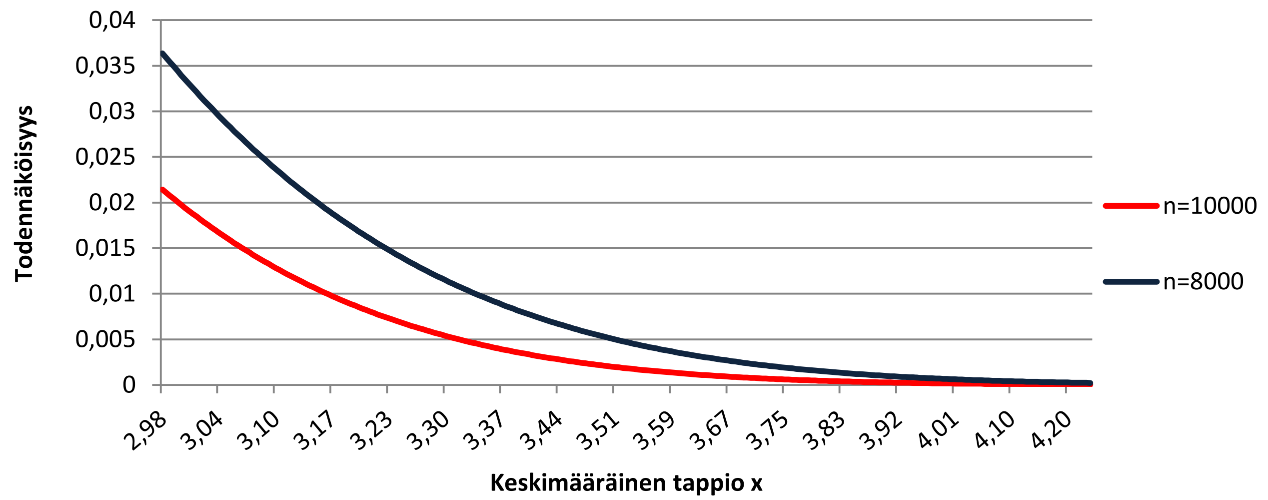
4. Lamakausi, eli $Y = y_4$: $x_-(Y) = 16{,}25 < x < x_+(Y) = \infty$

Verrattaessa keskimääräisiä tappioita $x_-(Y)$ eri talouden tilanteissa nähdään, että toisin kuin Yhdysvaltojen kohdalla Euroopassa pienin keskimääräinen tappio muodostuu nousukaudella. Kuten Yhdysvalloissa, myös Euroopassa suurin keskimääräinen tappio liittyy lamakauteen. Nousu- ja huippukauden keskimääräiset tappiot ovat melko lähellä toisiaan. Laskukaudella keskimääräinen tappio nousee selvästi ja lamakaudella ero muihin tiloihin on jo merkittävä. Erityisen kiinnostavaa on huomata, että vaikka Euroopan keskimääräiset tappiot ovat joko selvästi pienempiä tai hyvin linjassa Yhdysvaltojen kanssa nousu-, huippu- ja laskukauden kohdalla, on Euroopan lukema lamakauden tilanteessa huomattavasti korkeampi kuin Yhdysvaltojen.



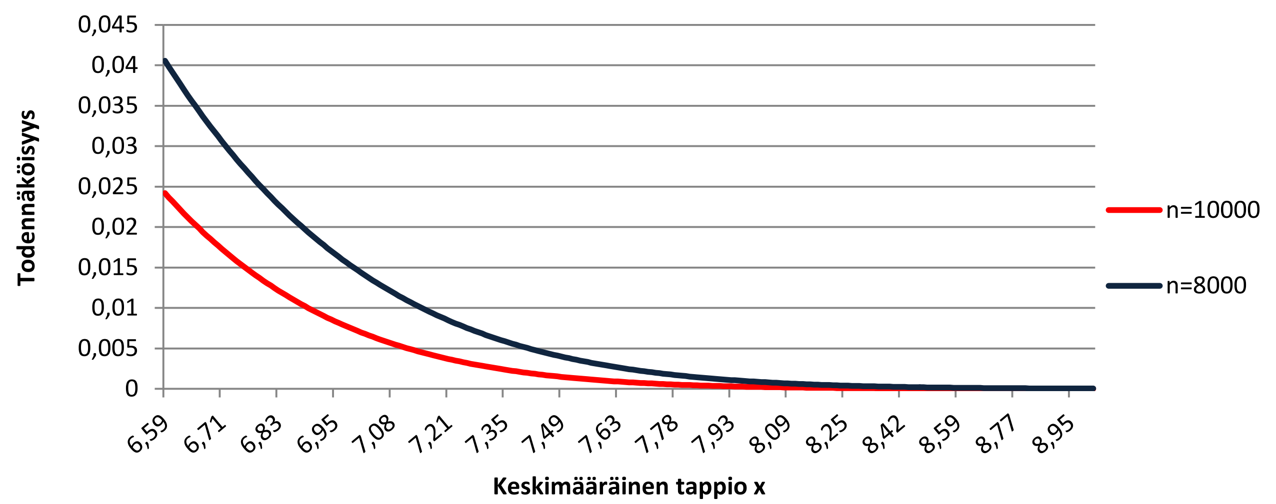
Kuva 17 Eurooppa, nousukausi

Euroopassa tarkasteluperiodin alhaisimmat konkurssitodennäköisyydet saavutetaan nousukaudella. Investment grade -luokan konkurssitodennäköisyys on 0, joten koko odotettavissa oleva tappio muodostuu salkun 20 % high yield -sijoituksista. Tarkasteltaessa suurempaa salkkua saavutetaan keskimääräinen tappio $x = 3{,}02$ per positio noin 1 % todennäköisyydellä ja tappio $x = 3{,}50$ noin 0,1 % todennäköisyydellä. Pienemmän salkun kohdalla vastaavat luvut ovat $x = 3{,}19$ ja $x = 3{,}74$.



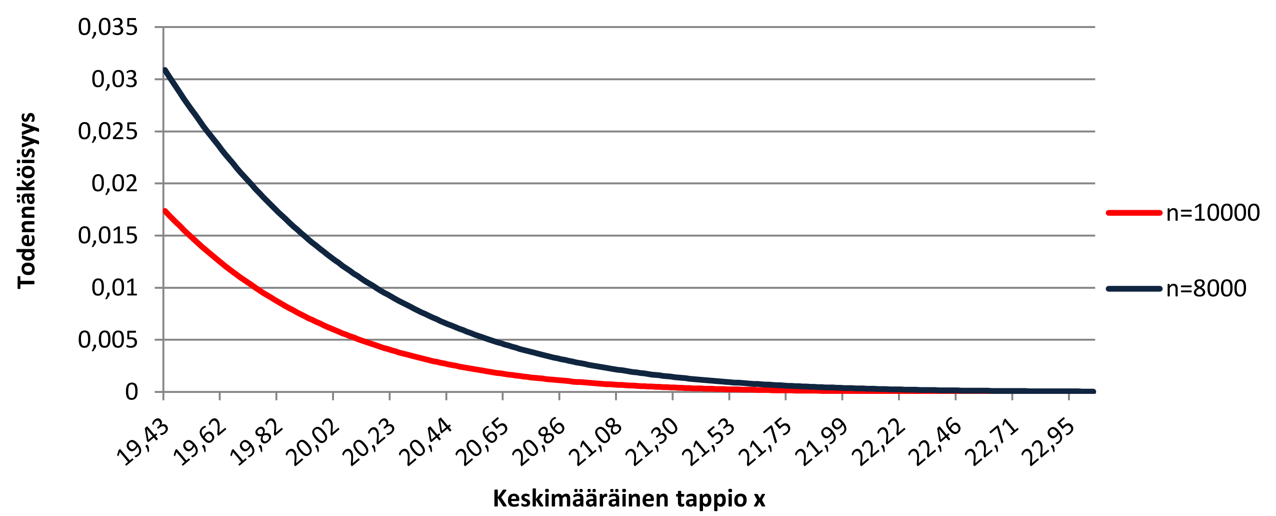
Kuva 18 Eurooppa, huippukausi

Tarkasteluperiodilla Euroopan huippuvuodet koettiin 1980-ja 1990-lukujen loppupuolella, sekä 2000-luvun keskivaiheilla. Huippu- ja nousukauden konkurssitodennäköisyydet ovat melko lähellä toisiaan varsinkin high yield -luokan kohdalla. Huippukaudella myös investment grade -luokka saa konkurssitodennäköisyyden, joka osaltaan nostaa keskimääräisiä tappioita. Euroopan nousu- ja huippukauden vertailu on erityisen kiinnostavaa juuri tästä syystä. Huippukauden lukemat tuovat hyvin esiin salkun 80 % investment grade -luokan painotuksen merkityksen. Tarkasteltaessa suurempaa salkkua saavutetaan keskimääräinen tappio $x = 3{,}16$ per positio noin 1 % todennäköisyydellä ja tappio $x = 3{,}65$ noin 0,1 % todennäköisyydellä. Pienemmän salkun kohdalla vastaavat luvut ovat $x = 3{,}34$ ja $x = 3{,}90$.



Kuva 19 Eurooppa, laskukausi

Euroopassa tarkasteluperiodin korkein investment grade -luokkaan liittyvä konkurssitodennäköisyys muodostuu laskukaudella. High yield -luokan konkurssitodennäköisyys on korkeampi kuin nousu- ja huippukaudella, mutta selkeästi matalampi kuin lamakaudella. Tarkasteltaessa suurempaa salkkua saavutetaan keskimääräinen tappio $x = 6{,}89$ per positio noin 1 % todennäköisyydellä ja tappio $x = 7{,}60$ noin 0,1 % todennäköisyydellä. Pienemmän salkun kohdalla vastaavat luvut ovat $x = 7{,}15$ ja $x = 7{,}96$.



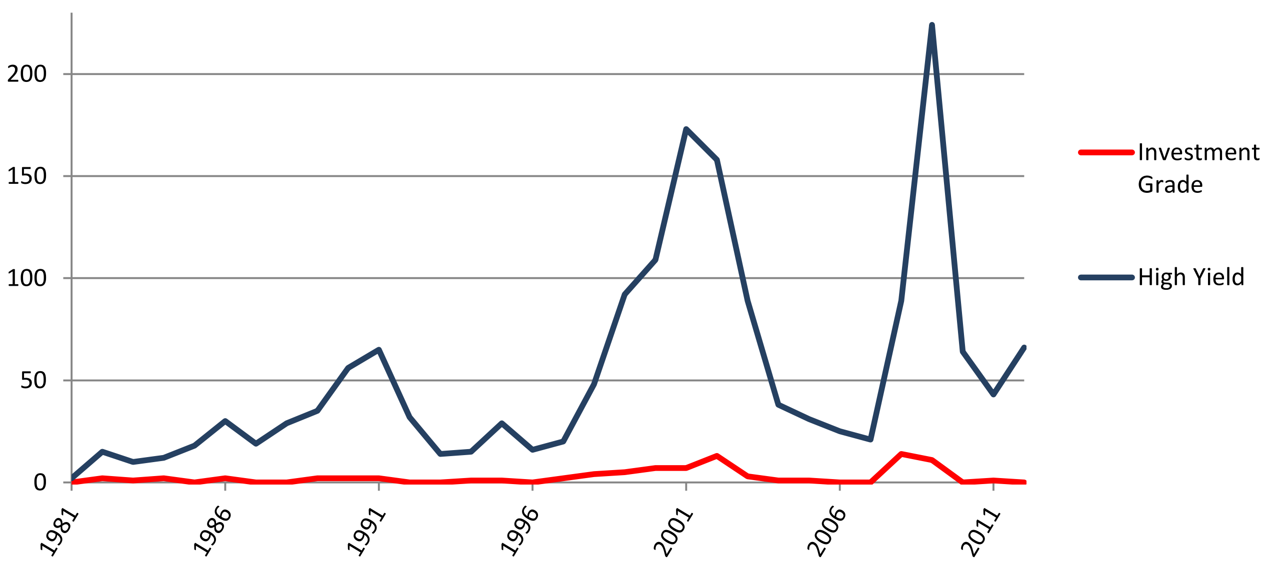
Kuva 20 Eurooppa, lamakausi

Myös Euroopassa on tarkasteluperiodin aikana koettu BTK:n kehityksen synkimmät hetket 1980- ja 1990-lukujen alussa, sekä 2000-luvulla. BKT:n kehityksellä mitattuna hankalimmat talousvuodet olivat 2000-luvun loppupuolella. Seurattaessa konkurssitodennäköisyysprosentteja 1990-luvun alkupuoli oli eurooppalaisille yrityksille erityisen raskas. Lamakautta tarkasteltaessa on kuitenkin syytä huomata, että Euroopan kohdalla eroavaisuus investment grade ja high yield -luokkien konkurssitodennäköisyyksissä on merkittävä. Investment grade -sijoitukselle lamakausikaan ei tuonut suurta poikkeamaa verrattaessa muiden talouden tilojen konkurssitodennäköisyyslukuihin. High Yield -sijoitusten kohdalla tilanne on toinen. Lamakauden suuren keskimääräisen tappion voidaan katsoa johtuvan suurimmaksi osaksi sijoitussalkun high yield -osiosta. Mikäli osuutta olisi nostettu yli 20 %, olisi merkitys korostunut vielä suuremmaksi. Tarkasteltaessa suurempaa salkkua saavutetaan keskimääräinen tappio $x = 19{,}74$ per positio noin 1 % todennäköisyydellä ja tappio $x = 20{,}90$ noin 0,1 % todennäköisyydellä. Pienemmän salkun kohdalla vastaavat luvut ovat $x = 20{,}17$ ja $x = 21{,}48$.

Tuloksista

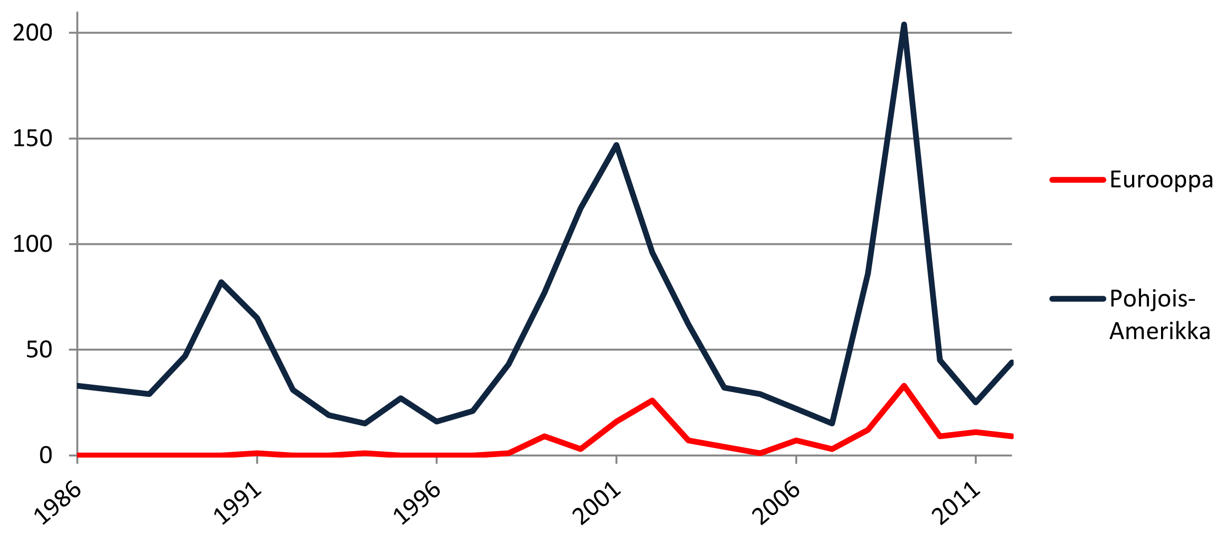
Verrattaessa tarkasteluperiodilta muodostettuja kuvia 11 ja 16 voidaan todeta, että vaikka BKT-käyrät ovat melko samanmuotoiset, tuntuu Eurooppa seuraavan Yhdysvaltoja syklin alkamisessa hienoisella viiveellä. Ennen 2000-lukua Euroopan liikkeet näyttävät myös Yhdysvaltoja maltillisemmilta. Huippuvuosien piikit eivät käy yhtä korkealla, mutta toisaalta myöskään laman syvyys ei ole ollut aivan yhtä kova. 2000-luku on uusimman talouskriisin myötä tuonut muutoksen tähän. Euroopan ja erityisesti euroalueen kriisivuodet muodostivat Euroopan lukuihin jopa Yhdysvaltoja syvemmän lamapiikin.

Tarkasteltaessa konkurssitodennäköisyyksiä nähdään, että Euroopassa kaikkien taloustilanteiden kohdalla investment grade -luokan lukemat jäävät melko alhaisiksi. Yhdysvalloissa nousu- ja laskukauden lukemat ovat myös alhaiset, mutta huippu- ja erityisesti lamakauden lukemat ovat jo korkeammat. High Yield -luokan kohdalla Euroopan nousu- ja huippukauden lukemat ovat matalat verrattuna Yhdysvaltoihin. Tilanne muuttuu, kun siirrytään tutkimaan lasku- ja lamakautta. Yhdysvaltojen kohdalla lamakausi tuotti alhaisimmat konkurssitodennäköisyyslukemat. Euroopan high yield -luokan lukema nousee Yhdysvaltoja korkeammaksi, mutta on kuitenkin vielä samassa suuruusluokassa. Lamakautta tarkasteltaessa päästään todella kiinnostaviin tuloksiin. Euroopan muuten maltillisista lukemista poiketen lamakauden high yield -konkurssitodennäköisyys nousee aivan omaan kokoluokkaansa. Tähän vaikuttavat erityisesti 1990- ja 2000-luvuilla nähdyt korkeat konkurssitodennäköisyydet. Konkurssitodennäköisyyksiin liittyvä kiinnostava huomio on myös se, että Yhdysvalloissa molempien sijoitusluokkien kohdalla suotuisin taloudentila oli laskukausi ja epäsuotuisin lamakausi. Euroopan kohdalla tilanne sijoitusluokkien välillä on hajanaisempi. Alhaisimmat konkurssitodennäköisyydet nähdään molempien luokkien kohdalla nousukaudella, mutta heikoimmat lukemat tulevat investment grade -luokalle laskukaudella, kun taas high yield -luokka pärjää heikoiten lamakaudella.



Kuva 21. Global investment grade ja high yield -indeksien luottotapahtumien lukumäärät

Kuvassa 21 esitetään maailmanlaajuisesti mitattuja luottotappioiden lukumääriä investment grade ja high yield -yrityslainojen osalta. Lähteenä on käytetty S&P:n tietokantaa. Molempien sijoitusluokkien välillä on nähtävissä talouden syklien vaihteluiden vaikutukset luottotapahtumien lukumäärään. Investment grade -luokan luottotapahtumien määrät ovat pysytelleet erittäin matalina lukuun ottamatta 2000-luvun pieniä nousuja. High yield -luokan kohdalla luottotapahtumien määrä on ollut tarkasteluperiodilla huomattavasti korkeampi. Edellä esitettyjä tuloksia tulkittaessa onkin syytä ottaa huomioon, että high yield -luokan yrityslainojen luottotappiot ovat huomattavasti yleisempiä. Analysoitavaa dataa on tarjolla enemmän ja yksittäisten tapausten merkitys ei korostu niin suureksi. Toisaalta juuri tästä syystä investmet grade -luokassa tapahtuvat luottotapahtumat ovat vielä tärkeämpiä. Sijoitusluokkaa pidetään turvallisempana ja sen luottotapahtuminen todennäköisyydelle asetetut odotukset ovat huomattavasti alhaisemmat. Vaikka vähäisessä tapahtumamäärässä yksittäisen tapahtuman merkitys korostuu, tarjoaa se kuitenkin arvokasta tietoa allokaatiopainojaan puntaroiville sijoittajille.



Kuva 22 Euroopan ja Pohjois-Amerikan luottotappiomäärät

Kuvassa 22 on vielä esitetty luottotappioiden jakautumista Pohjois-Amerikan ja Euroopan välillä. Tässä on lähteenä luottoluokittaja Moody's ja siksi tarkasteluperiodi eroaa hiukan edellisistä. Lisäksi on syytä huomioida, että Pohjois-Amerikan luvut sisältävät myös Kanadan. Euroopan luottotappiomäärät olivat vielä 1980- ja 1990-luvuilla melko vähäiset. 2000-luvun alku ja loppupuolella Euroopan lukemissa on selvät piikit. Erityisesti viimeisimmän euroalueen kriisin myötä Euroopassa koetut luottotapahtumat kasvoivat merkittävästi. Pohjois-Amerikan kohdalla luottotappioiden määrä on pysynyt selvästi suuremmissa lukemissa kaikissa talouden periodeissa. Myös Pohjois-Amerikan datassa on nähtävissä selvät piikit BKT:n pahimpien supistumiskausien kohdalla.

Lähdeluettelo

[1] T. Sottinen, Todennäköisyysteoria, Helsinki, 2006.

[2] H. Nyrhinen, Riskiteoria, Helsinki, 2011.

[3] P. Tuominen, Todennäköisyyslaskenta I, Helsinki: Limes ry, 2004.

[4] H. Nyrhinen, Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, Helsinki, 2011.

[5] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton: Princeton University Press, 1970.

[6] N. Alger, Legendre Transform, http://maze5.net/?page_id=733.

[7] J. Manton, Jonathan manton's Blog, http://jmanton.wordpress.com/2010/11/21/introduction-to-the-legendre-transform/.

[8] R. S. Ellis, The Theory of Large Deviations and Applications to Statistical Mechanics, Massachusetts, 2006.

[9] H. Cramér, Random Variables and Probability Distributions, Cambridge: Cambridge University Press, 1937.

[10] H. Cramér, Mathematical Methods of Statistics, Princeton: Princeton University Press, 1966.

[11] E. Lukacs, Characteristic Functions, London: Butler & Tanner Ltd, 1970.

[12] H. Nyrhinen, Sijoitustoiminnan matematiikka, Helsinki, 2011.

[13] E. Nummelin, Johdatus finanssimatematiikkaan, Helsinki, 2009.

[14] ICMA, International Fixed Income and Derivative Certificate Programme, Wiley, 2012.

[15] H. Bühlmann, Mathematical Methods in Risk Theory, Springer, 1996.

[16] A. Melnikov, Risk Analysis in Finance and Insurance, London: CRC Press, 2011.

[17] H. Cramér, The elements of probability theory and some of its applications, Stockholm: Almqvist & Wiksells, 1954.

[18] S. R. S. Varadhan, Large Deviations, 2010.

[19] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt ja J. Teugels, Stochastic Processes for Insurance and Finance, Chichester: John Wiley & Sons, 1999.

[20] How to prepare for extreme conditions, Financial Times, 2010.

[21] A. Adams, P. Booth, D. Bowie ja D. Freeth, Investment Mathematics, Wiley, 2003.

[22] A. Dembo ja O. Zeitouni, Large Deviations Techniques and Applications, Springer, 1998.

[23] G. Elfving ja P. Tuominen, Todennäköisyyslaskenta II, Helsinki: Limes ry, 1990.

[24] J.-D. Deuschel ja D. W. Stroock, Large Deviations, San Diego: Academic Press INC, 1989.

[25] A. Dembo, J.-D. Deuschel ja D. Duffie, Large Portfolio Losses, Cambridge, 2002.

[26] C. Klüppelberg ja T. Mikosch, ”Large Deviations of Heavy-Tailed Random Sums with Applications in Insurance and Finance”.

[27] S. R. S. Varadhan, Large Deviations and Applications, Universities Press (Belfast) Ltd., 1984.

[28] P. Groeneboom, Large Deviations and Asymptotic Efficiencies, Amdterdam: Mathematical centre, 1980.